LES SUITES

I. Variations des suites

1. Définitions

Suite Croissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n \quad (\text{resp } u_{n+1}>u_n)$$

Suite Décroissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leq u_n \quad (\text{resp } u_{n+1}<u_n)$$

II. Suites majorées, minorées et bornées

1. Définitions

a. Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$$

b. Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel N tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ N\leq u_n$$

c. Une suite (u_n) est dite **bornée** si elle est majorée et minorée. Il existe deux réels M et N tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ N\leq u_n\leq M$$

2. Remarques

a. Si (u_n) est majorée par M alors tous les nombres réels $>$ M sont aussi des majorants de cette suite.

b. Si (u_n) est minorée par N alors tous les nombres réels $<$ N sont aussi des minorants de cette suite.

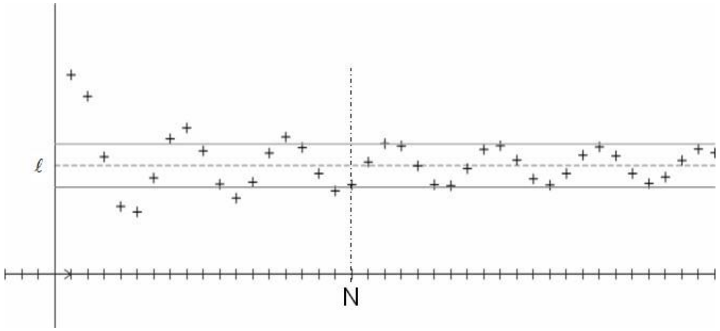
III. Limites d'une suite

1. Définitions

Définition 01

On note $\ell\in\mathbb{R}$

On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.



Proposition : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ alors ℓ est unique.

Définition 02 :

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Remarque : Certaines suites n'ont pas de limite comme par exemple (w_n)

Définition 03 :

Si (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) converge vers ℓ.

Dans tous les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que la suite diverge.

2. Limite des suites usuelles

Théorème :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

3. Opérations sur les limites

a. Somme

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI

c. Quotient

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI	FI

4. Limites par comparaison

Théorème :

(u_n) et (v_n) sont deux suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

5. Limite par encadrement

Théorème d'encadrement (dit : Théorème des gendarmes) :

$\ell \in \mathbb{R}$

(u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

- Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \ell$

6. Limite d'une suite monotone

Théorème :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

7. Limite d'une suite géométrique

Rappels sur les suites géométriques :

On note u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_{n+1} = u_n \times q$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}, \; q \neq 1$$

Théorème :

q est un nombre réel différent de 1.

- Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

8. Limite et variation

Théorème :

Si (u_n) est croissante et convergente alors elle est majorée par ℓ

Théorème :

Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle admet $+\infty$ comme limite.

Conclusion :

Une suite croissante est :

- Soit majorée et convergente
- Soit non majorée et de limite $+\infty$ donc diverge.

Les complexes (Partie I)

a. Définition, notations et applications

Définition :

On nomme $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, défini par

$$\mathbb{C}=\left\{a+ib \quad ,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},i^2=-1\right\}$$

Remarques :

- $\mathbb{C}$ contient tous les nombres réels donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
- i est un nombre et n'est pas une variable. $i^2=-1$

Application : Si $a\in\mathbb{R}^+$ alors $-a=\left(i\sqrt{a}\right)^2$

Notation et vocabulaire :

On note souvent les nombres complexes z . Il existe donc deux réels unique tels que

$$z=a+ib$$

- $z=a+ib$ se nomme « **l'écriture algébrique** de z »
- a se nomme « **la partie réelle de** z » et se note $a=\mathrm{Re}(z)$
- b se nomme « **la partie imaginaire de** z » et se note $b=\mathrm{Im}(z)$
- Si $b=0$ alors $z=a$ donc z est un « **nombre réel** ».
- Si $a=0$ alors $z=ib$ et on dit que z est un « **imaginaire pur** »
- 0 est à la fois un nombre réel et un imaginaire pur.
- On note $\bar{z}=a-ib$ est « **le nombre complexe conjugué de** z »

IV. Stabilité de l'ensemble des nombres complexes

a, b, a', c' sont des nombres réels.

On note $z_1=a+ib$ et $z_2=a'+ib'$ deux nombres complexes.

Le but est de savoir si en ajoutant, soustrayant, multipliant et divisant deux nombres complexes, on obtient toujours un nombre complexe ?

1. $\mathbb{C}$ est-il stable par addition ?

$$Z=z_1+z_2=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$

2. $\mathbb{C}$ est-il stable par soustraction ?

$$Z=z_1+z_2=(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$$

3. $\mathbb{C}$ est-il stable par multiplication ?

$$Z=z_1\times z_2=(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

4. $\mathbb{C}^*$ est-il stable par passage à l'inverse ?

$$Z=\frac{1}{z_1}=\frac{1}{(a+ib)}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

5. $\mathbb{C}^*$ est-il stable par division ?

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}-i\frac{ab'+ba'}{a'^2+b'^2}$$

V. Propriétés

On note z et z' deux nombres complexes.

Propriété 01 : $z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=0 \\ \mathrm{Im}(z)=0 \end{cases}$

Propriété 02 : $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$

Propriété 03 : (Nombre complexe conjugué)

i. $\overline{\overline{z}}=z$

ii. $z=z' \Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'}$

iii. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

iv. $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

v. $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

vi. $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

vii. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

viii. Si $z=a+ib$ alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$

ix. Si $z\neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

x. Si $n\in\mathbb{Z}$ alors $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$

VI. Equation du second degré $az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\ et\ c\in\mathbb{R}$

Théorème :

- Si $\Delta>0$ alors

  $$az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$$ et

  il y a donc deux racines (solutions de l'équation) réelles distinctes :

  $$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$ alors $az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$ et il y a donc une seule racine réel :

  $$x_1=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$ alors $\Delta=i^2|\Delta|$ alors

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)=a(z-z_1)(z-z_2)$$

et il y a donc deux racines (solutions de l'équation) complexes distinctes :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

(Remarque : $\overline{z_1}=z_2$)

VII. Représentation géométrique d'un nombre complexe.

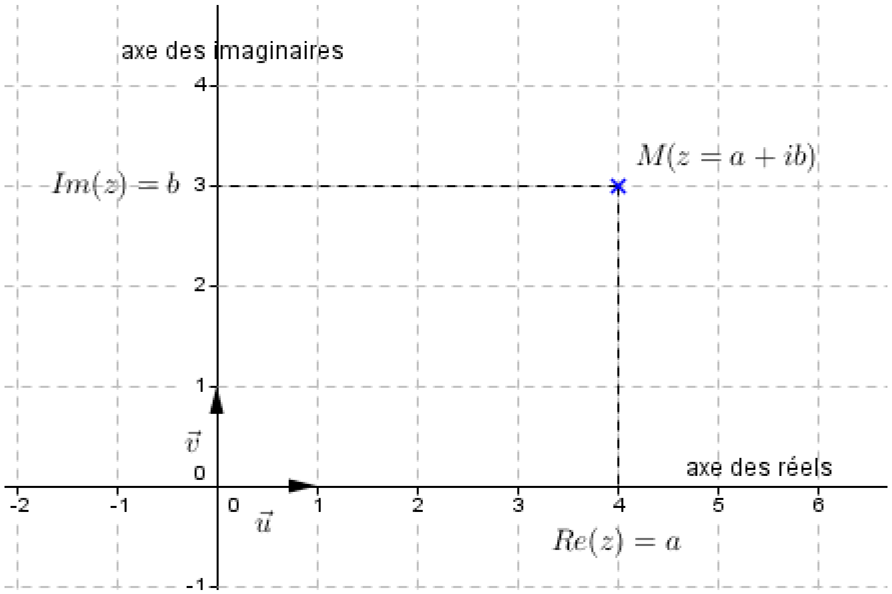
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut lui faire correspondre un point dans la plan, le point M de coordonnées $(a;b)$. Pour chaque nombre complexe dans $\mathbb{C}$, il existe un unique point $M(a;b)$ dans le plan et pour chaque point $M(a;b)$ dans le plan, il existe un unique nombre complexe $z=a+ib$.

On dira alors que $z=a+ib$ est **l'affixe** du point $M(a;b)$

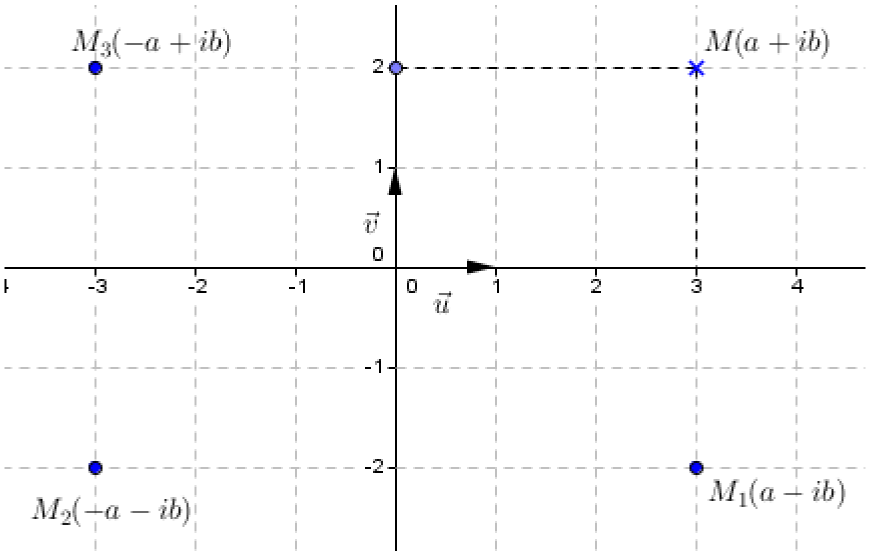
Remarques :

- Si z est réel alors M(z) est sur l'axe des abscisses et donc on nommera cet axe l'axe des réels.
- Si z est imaginaire pur alors M(z) est sur l'axe des ordonnées et donc on nommera cet axe l'axe des imaginaires purs.



Remarques :

- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- Les points d'affixes z et $-\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires.



Affixe d'un vecteur :

$\overrightarrow{OM}$ et M ayant les mêmes coordonnées, on dit aussi que z, affixe de M, est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

Propositions :

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de I milieu de [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- Si $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ alors
  i. $\vec{w} = \vec{w}' \Leftrightarrow z = z'$
  ii. $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$
  iii. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\vec{w}$ a pour affixe λz

Continuité et limites

VIII. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie

Définition 01

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Définition 02

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$

Définition 03

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand dans les négatifs.

On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Définition 04

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$

Limites des fonctions usuelles

Théorème 01 :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\qquad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

2. Limite infinie

Définition 05

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Définition 06

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Remarques : On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Limites des fonctions usuelles

Théorème 02 :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^k = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 = +\infty$

$$k \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{x \mapsto -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

IX. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 07 (à droite)

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$. On dit que f admet pour limite à droite en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant supérieur à a.

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Remarque : On peut faire une définition équivalente à gauche et si la limite est $-\infty$

Définition 08

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ on dit alors que f admet une limite en a

Définition 09

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite ou à gauche) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Limites des fonctions usuelles

Théorème 03 :

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\mapsto 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ <}} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

X. Opérations sur les limites

1. Opérations algébriques

On a les mêmes résultats que pour les suites.

a. Somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim fg$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI

c. Quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI	FI

2. Composition

Notation : Si f est définie sur I et g sur $f(I)$ alors on peut définir la fonction composée de g par f :

$h(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

Théorème 04 :

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{X\to b} g(X) = \ell$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

XI. Cas des fonctions polynômes et rationnelles

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction rationnelle se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré.

XII. Limites et comparaison

Les théorèmes sont analogues à ceux des suites.

Théorème de comparaison :

f et g sont deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que pour tout $x\in]a;+\infty[$, $f(x)\leq g(x)$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Même chose si f et g sont définies sur $]-\infty;a[$ et la limite en $-\infty$

Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)

f, g et h sont trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que pour tout $x\in]a;+\infty[$, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

XIII. Continuité

Définition 10

- f est une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.
  f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- f est continue sur I si elle est continue en tout $a\in I$

Théorème 05

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention : La réciproque est fausse : Exemple $x\mapsto|x|$ et $x\mapsto\sqrt{x}$

Théorème 06 :

Toute fonction construite par somme, produit, composée des fonctions usuelles est continue sur tout intervalle où elle est définie.

XIV. Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

On note k un nombre de l'intervalle $f([a;b])$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ ayant pour minimum n et maximum M sur $[a;b]$. Pour tout $k\in[n;M]$, il existe au moins un réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha)=k$.

Corollaire

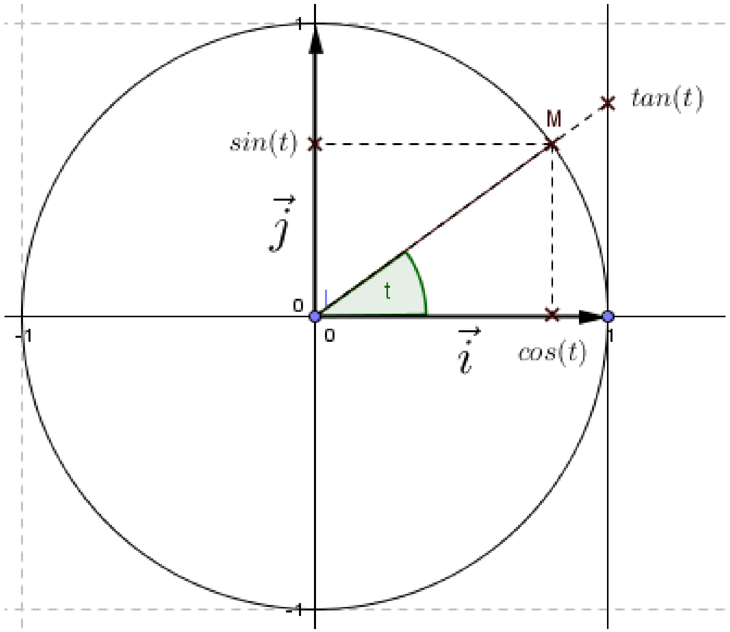
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $k\in f(I)$, il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha)=k$.

Dérivabilité et fonctions trigonométriques

XV. Fonctions trigonométriques (Sinus et Cosinus)

1. Rappels et Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. A tout réel t, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique. Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le point M a pour coordonnées : $M(\cos(t);\sin(t))$



Définition 01 :

- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\cos(t)$, est appelée la fonction cosinus / $\cos : t \mapsto \cos(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\sin(t)$, est appelée la fonction sinus / $\sin : t \mapsto \sin(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\tan(t)$, est appelée la fonction tangente / $\tan : t \mapsto \tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

<u>**Remarque**</u> : La fonction tangente n'est pas au programme de terminale mais il est intéressant de la connaître et de savoir ce que cela représente sur le cercle trigonométrique.

2. Propriétés et interprétations graphiques

Définition 02 :

La fonction cosinus est <u>paire</u> sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(-t) = \cos(t)$$

Définition 03 :

La fonction sinus est <u>impaire</u> sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(-t) = -\sin(t)$$

Définition 04 :

Les fonctions cosinus et sinus sont <u>périodiques</u> de période 2π sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t+2\pi)=\cos(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t+2\pi)=\sin(t)$$

3. Dérivation.

Théorème 01 :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x}=1$$

Théorème 02 :

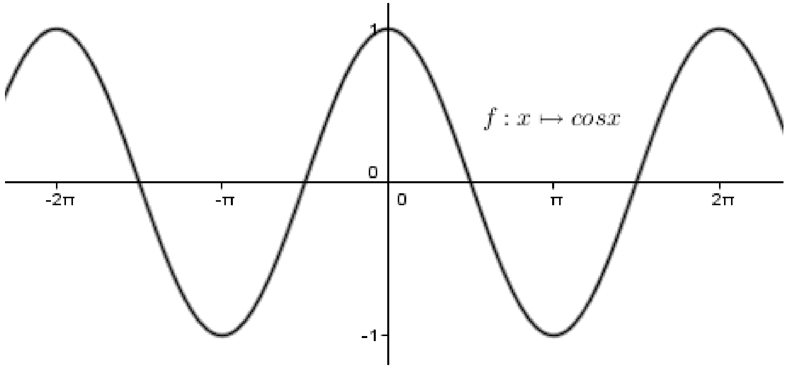
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos x-1}{x}=0$$

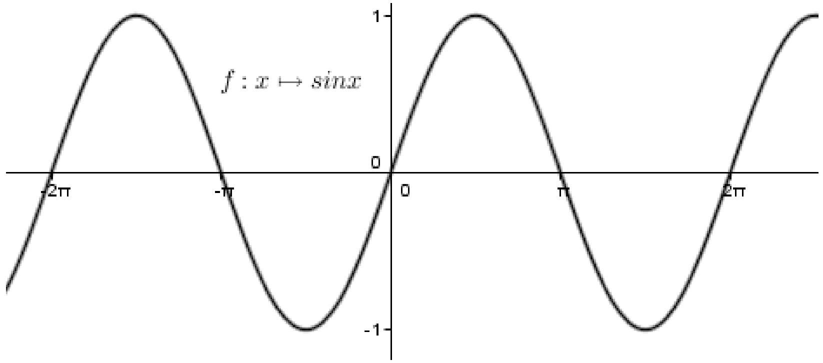
Théorème 03 :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos'(x)=-\sin(x)$$
$$\sin'(x)=\cos(x)$$

Représentation graphique des deux fonctions





XVI. Compléments sur la dérivation.

1. Rappels

f est définie sur un intervalle I et $a \in I$

- *f* est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, est unique et est finie. Dans ce cas on note $f'(a)$ le nombre dérivé de *f* en *a* et $f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, on note f' la fonction qui à x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ donc $f': x \mapsto f'(x)$
- Géométriquement, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$

2. Calculs de dérivées

a. $g : x \mapsto f(ax+b)$

Théorème :
Soit a et b deux réels et f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout x tel que $ax+b \in I$, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable en x et

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

b. $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Théorème :
Si f est une fonction définie et dérivable sur I, strictement positive sur I, alors la fonction $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

c. $g : x \mapsto \left(f(x)\right)^n = f^n(x)$ où $n \in \mathbb{Z}^*$

Théorème : $n \in \mathbb{Z}^*$
Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I dans le cas où $n < 0$, alors la fonction $g : x \mapsto \left(u(x)\right)^n = u^n(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$$

d. $g : x \mapsto \left(f \circ u\right)(x) = f(u(x))$

Théorème :
Si u est une fonction dérivable sur I et f dérivable sur u(I), alors la fonction $g : x \mapsto f \circ u(x) = f(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

Probabilités conditionnelles

XVII. Introduction, définition et propriétés

4. Définition et propriétés

Définition :

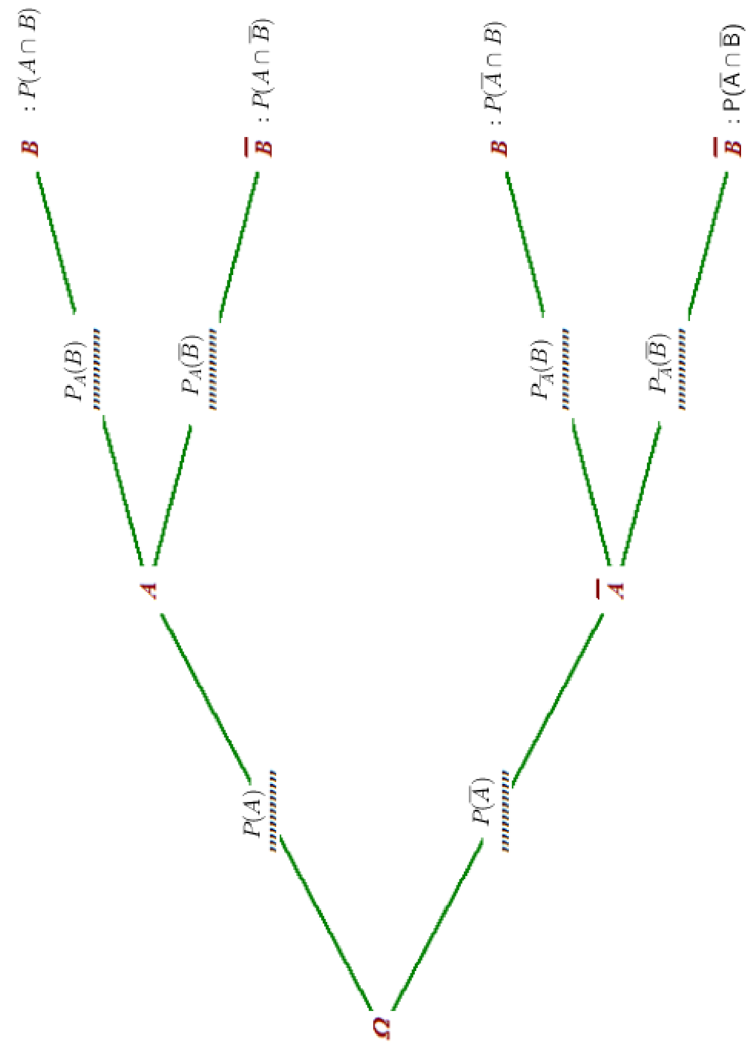
p est une probabilité sur un univers Ω. A est un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel :

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriétés :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- $P_A(A) = 1$
- $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A\left(B\right)$
- Si A et B sont incompatibles $A \cap B = \varnothing$ alors $P_A(B) = P_B(A) = 0$

5. Utilisation d'un arbre pondéré :

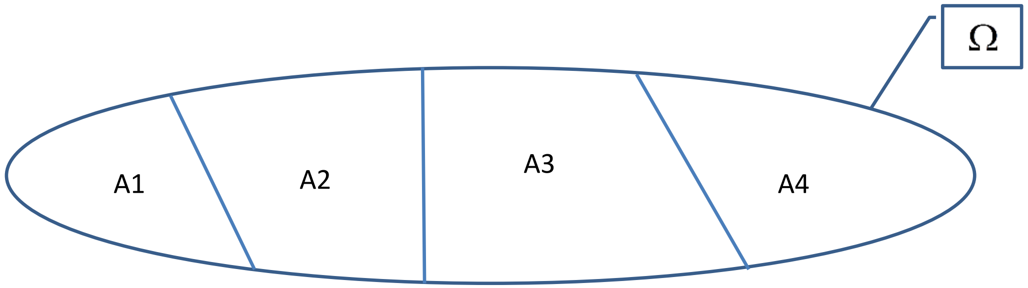


XVIII. Formule de probabilités totales

Définition (Partition de l'univers) :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements de probabilité non nulle de l'univers. On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω ou un système complet d'événements de Ω si les B_i sont deux à deux disjoints (intersection vide) et si

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

Théorème des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements de Ω et si B est un événement de Ω alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

et

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \ldots P_{A_n}(B)P(A_n)$$

XIX. Indépendances d'événements

Définition : On dit que deux événements **A et B sont indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème : A et B indépendants et $P(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; P_A(B) = P(B)$

Propriété : Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi

Fonction Exponentielle

XX. Introduction et découverte de la fonction exponentielle

6. Existence et définition et unicité

Propriété :

Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors, pour tout réel x, on a $f(x)f(-x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$.

Théorème :

Il <u>existe</u> une <u>unique</u> fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

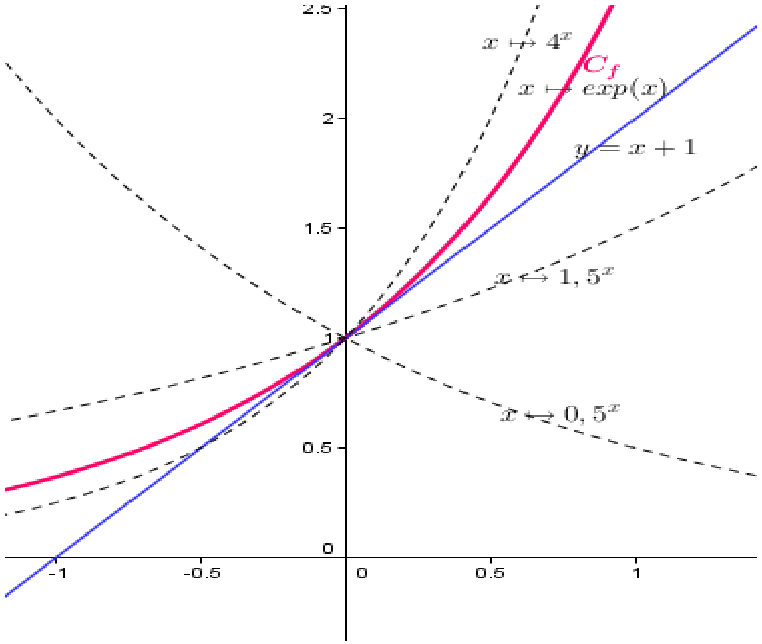
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**

Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$

7. Autre définition

Définition :

La fonction exp est l'unique fonction f de la forme $x \mapsto q^x$ dont la courbe représentative admet une tangente d'équation $y = x + 1$ au point d'abscisse 0. Si on note e l'image de 1 par cette fonction alors on a $q = e$ et $f(x) = e^x$



XXI. Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et notation

La fonction exponentielle est l'unique fonction vérifiant

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On notera cette fonction $\exp : x \mapsto e^x$

Propriétés : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $\left(e^x\right)' = e^x$

2. Propriétés

Propriétés algébriques

Pour tout x et y réels et pour tout entier relatif n

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e \approx 2{,}718$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$

3. Variations

Théorème : La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Conséquence : f' et u' sont de mêmes signes.

Corollaire :

Si a et b sont deux nombres réels

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

4. Limites

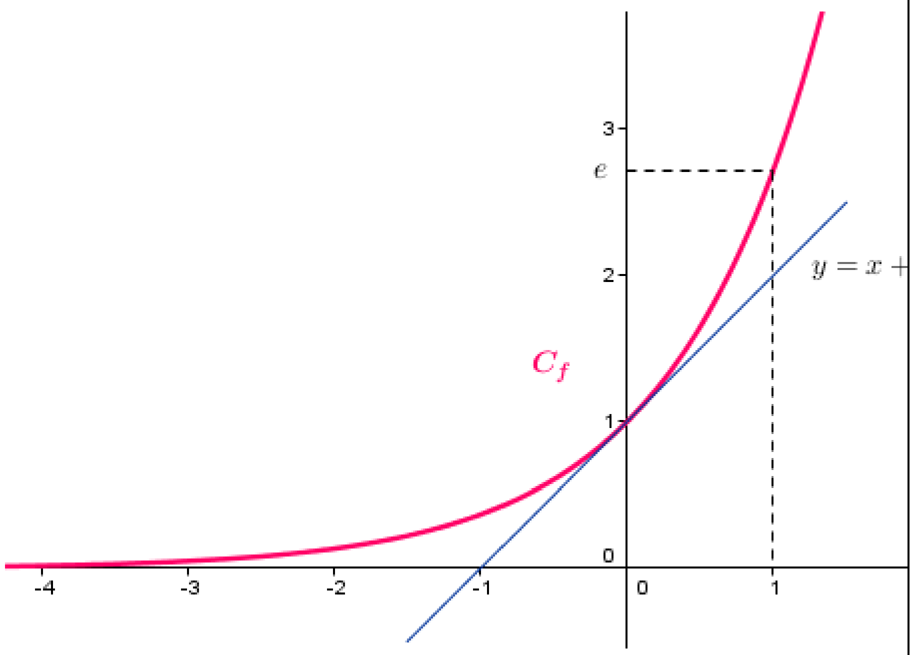
Théorème : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$

Théorème : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

5. Tableau des variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

XXII. **Courbe représentative**



Fonction logarithme

XXIII. Introduction et définition

8. Activité d'introduction

Définition 01 :

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x$ est l'unique nombre dont l'exponentielle vaut x : $e^{\ln x} = x$

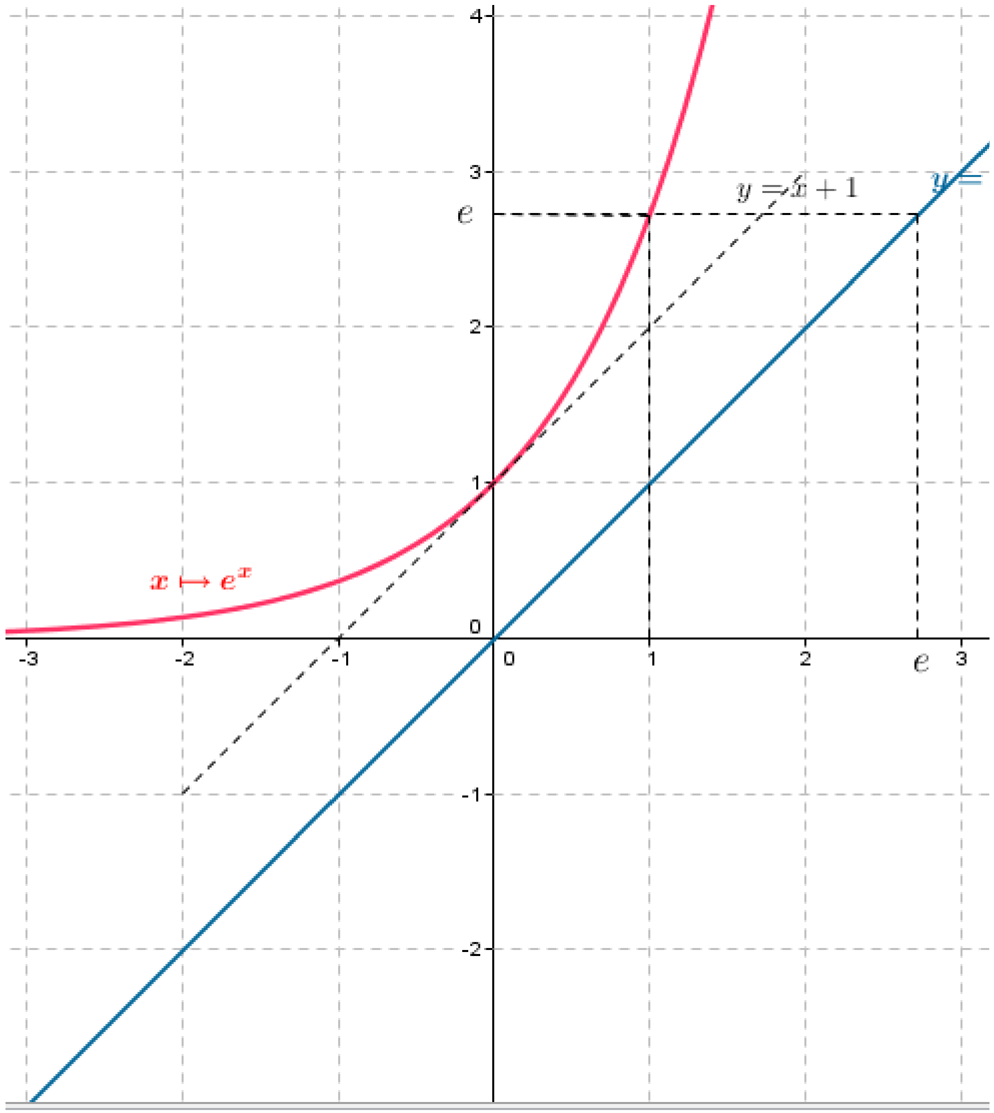
Définition 02 :

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à tout $x \in]0;+\infty[$ elle lui associe le nombre réel noté $\ln x$ tel que $e^{\ln x} = x$

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

9. Conséquences

➢ Pour obtenir la courbe de la fonction logarithme, il faut faire la symétrie de la courbe de la fonction exponentielle, par rapport à la droite d'équation $y = x$



- $D_f =]0;+\infty[$
- $\forall x>0,\quad e^{\ln x}=x$ et $\forall x\in\mathbb{R},\quad \ln\left(e^x\right)=x$
- $\ln 1=0$ et $\ln e=1$
- $\forall x>0,\ \forall y\in\mathbb{R}\ :\ y=\ln x \iff x=e^y$
- $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1)=1$
- L'équation réduite de la tangente à la courbe du logarithme népérien, au point d'abscisse 1 est $y=x-1$

XXIV. Propriétés du logarithme népérien

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\forall n\in\mathbb{R}$, $\ln\left(a^n\right)=n\times\ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$

Théorème 01 :

Le fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Conséquences :

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln a<\ln b \iff \ldots\ldots<\ldots\ldots$
- $\ln a=\ln b \iff \ldots\ldots=\ldots\ldots$
- $\ln a>0 \iff a>\ldots\ldots$
- $\ln a<0 \iff \ldots\ldots<a<\ldots\ldots$

Théorème 02 :

Soit une fonction u dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction $f:x\mapsto\ln\left[u(x)\right]$ est dérivable sur I et pour tout x de I

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

XXV. Limites

Théorème 03 : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} \ln x = -\infty$

Théorème 04 : $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 0} x^n \ln x = 0$$

Théorème 05 :

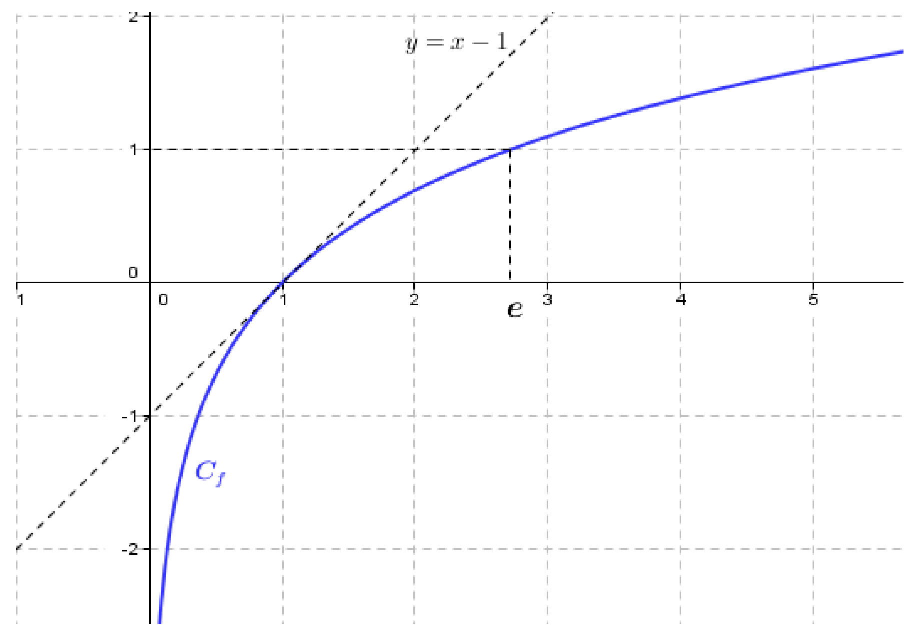
$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

XXVI. Etude de la fonction logarithme

6. Tableau des variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Courbe représentative



XXVII. Suppléments

- Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$: $a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln a}$
- La fonction **logarithme décimal** est la fonction notée $\log$ définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques :

$\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 10^n = n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)

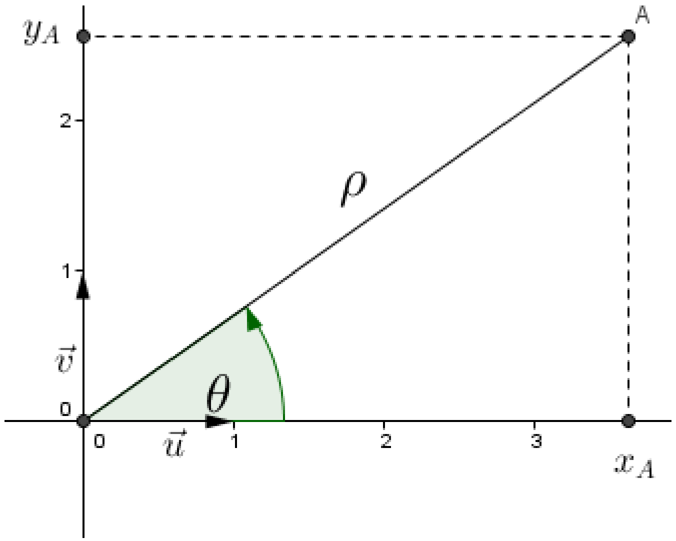
Les complexes (Partie II)

I. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe

1. Découverte

Soit A d'affixe $z_A = x_A + iy_A$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

$\rho = OA$ puis $\theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$



2. Définition et propriétés

Définition :

Soit z_A un nombre complexe non nul, affixe d'un point A dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'écriture trigonométrique de z_A est $z_A = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ avec $\rho \geq 0$

Avec $\rho =$ et

$\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi]$

Vocabulaires

- On dira que $\left[\rho, \theta\right]$ sont **les coordonnées polaires** de A dans le repère $(A, \vec{u})$
- ρ se nomme « **le module de z_A** » et se note aussi $|z_A|$
- θ se nomme « **un argument de z_A** » et se note aussi $\arg(z_A)$

3. Propriétés

On note $z=a+ib$ un complexe non nul.

- $|z|^2=z\bar{z}$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|=|a|$
- $z\in\mathbb{C}\Leftrightarrow |z|=|b|$
- $|z|=|-z|=|\bar{z}|$
- $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\,[2\pi]$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \arg(z)=0\,[\pi]$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}\,[\pi]$
- $z=z'\Leftrightarrow \begin{cases}|z|=|z'|\\ \arg(z)=\arg(z')\,[2\pi]\end{cases}$

4. Application à la géométrie

On note $A(z_A)$ et $B(z_B)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

$$\begin{cases}AB=|z_{\overrightarrow{AB}}|=|z_B-z_A|\\ \arg(z_{\overrightarrow{AB}})=\arg(z_B-z_A)\end{cases}$$

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

1. Introduction

Définition :

Si z est un complexe non nul, d'argument θ, alors z peut s'écrire sous la forme exponentielle : $z=|z|e^{i\theta}$

Conséquence :

- Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est de module 1 et d'argument θ. Son point image se situe sur le cercle trigonométrique.
- Si $z=a+ib$ est un complexe non nul et si $|z|=\rho$ et $\arg(z)=\theta\,[2\pi]$ alors

$$z=a+ib=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$$

Petite curiosité :

Démontrer que $e^{i\pi}+1=0$

2. Propriétés

On note z et z' deux complexes non nuls :

a. Propriétés sur les modules

- $|zz'|=|z|\times|z|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|z^n|=|z|^n$

b. Propriétés sur les arguments

- $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\,[2\pi]$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\arg(z^n)=n\times\arg(z)\,[2\pi]$

c. Formule de Moivre

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

d. Formules d'addition de trigonométrie.

Pour tout $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$$

$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta$$

e. Formules d'Euler (hors programme)

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\[2mm]\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\end{cases}$$

Calcul d'intégrale

III. Intégrale d'une fonction continue positive

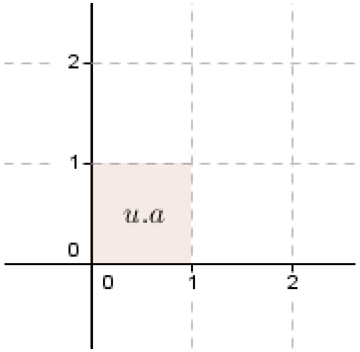
5. Activité de découverte

Activité 01 et activité 02 en fichiers annexes joints

6. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition 01 (Unité d'aire)



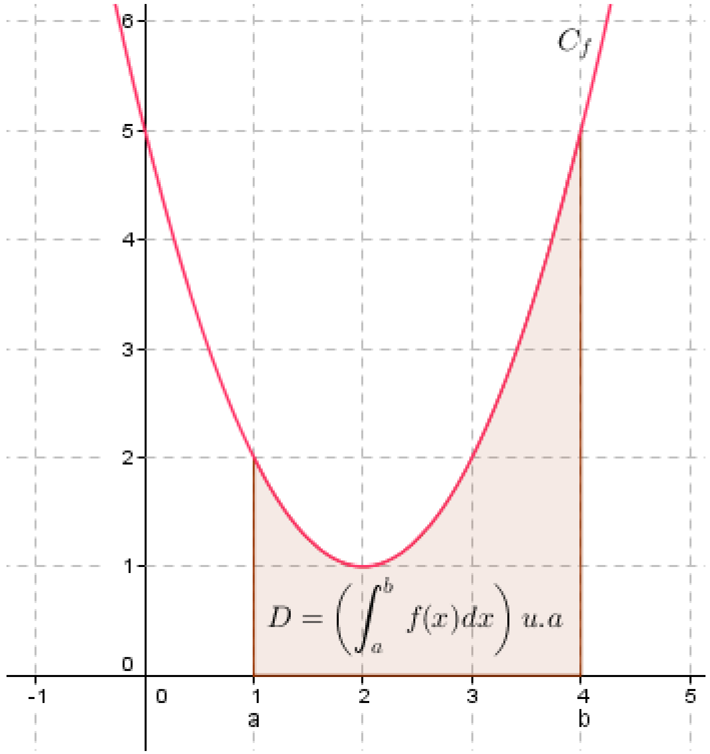
L'aire du rectangle OIKJ définit **l'unité d'aire** noté $u.a$

Définition 02 (Intégrale de a à b de f)

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et C_f sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'intégrale de de a à b de f est l'aire, exprimée en $u.a$, du domaine D délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Remarques :

- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. C'est une variable muette $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$.
- a et b sont les bornes de l'intégrale et on a $a < b$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

7. Fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$

Théorème 01 :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$

alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$

IV. Primitive d'une fonction continue

1. Définition et propriétés

Définition 03 :

f est définie sur un intervalle I.

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

Propriétés

- Si f admet une primitive F sur I alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f sur I.
- Si f admet des primitives sur I, alors il en existe une seule vérifiant $F(a) = b$

2. Tableaux des primitives

Formules pour trouver une primitive des fonctions usuelles :

Fonctions f	Sur …	Une primitive F
$f : x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto kx$
$f : x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}, n > 1$	$]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$F : x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	$F : x \mapsto \ln x$
$f : x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto e^x$
$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$F : x \mapsto \sqrt{x}$

$f:x\mapsto\cos x$	$\mathbb{R}$	$F:x\mapsto\sin x$
$f:x\mapsto\sin x$	$\mathbb{R}$	$F:x\mapsto-\cos x$

Formules générales pour trouver une primitive d'une fonction :

Fonctions	**Une primitive**
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)$
$u'(x)-v'(x)$	$u(x)-v(x)$
$k\times u'(x)$	$k\times u(x)$
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^n}$ avec $u\neq 0$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u>0$	$\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$ avec $u>0$	$\ln u$

3. Cas des fonctions positives et continues

Théorème 02

Si f est continue positive sur $[a,b]$ alors $\phi:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a. Toutes les primitives de f sont les fonctions F telles que $F(x)=\phi(x)+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Proposition :

Si f continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Théorème 03 :

Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I

Remarque : Il existe des fonctions discontinues sur I et qui admettent des primitives sur I.

V. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Extension de la définition

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. a et b sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Théorème (admis) :

f est une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

2. Propriétés

Relation de Chasles : f est continue sur I et a, b, c sont des nombres de I.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Linéarité : f et g sont continues sur I et a, b sont des nombres de I et $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Positivité : f est continue sur $[a,b]$

$$\text{Si } \begin{cases} f \geq 0 \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Conservation de l'ordre : f et g sont continues sur $[a,b]$

$$\text{Si } \begin{cases} f \leq g \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Inégalité de la moyenne et Valeur moyenne

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$