Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 12 :

La géométrie dans l'espace. (Partie II)

Produit Scalaire dans l'espace

Année :

2014-2015

Euclide (Grèce Antique)

Citation du moment :

«Le rythme est dans le temps ce que la symétrie est dans l'espace. » (Eugène d'Eichtal)

I. Produit scalaire

1. Définition et rappels

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On note A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

A, B et C sont donc tous les trois dans le plan (ABC) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On peut donc calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC)

Définition :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.

Soient A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Rappels de première :

1. **Carré scalaire** : $\boxed{\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2}$

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

   dans un repère orthonormé :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

ou

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

ou

Soient A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$

ou

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right]}$$

ou

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]}$$

3. Propriétés algébriques

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

a. Formule : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

b. **Symétrie** : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

c. **Bilinéarité** : $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

d. **Distributivité** : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Démonstration :

4. Vecteurs orthogonaux

Théorème :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Démonstration :

II. Equations d'un plan

1. Equation paramétrique

On note (P) le plan passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et qui contient deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

Soit M un point du plan (P)

Que peut-on dire de $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

On a donc :

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AM} =$

Une équation paramétrique du plan (P) est donc :

$$\begin{cases} x = \\ \\ y = \\ \\ z = \end{cases}$$

Attention : Il n'y a pas qu'une seule équation paramétrique pour représenter un plan (P). Plusieurs représentations paramétriques peuvent représenter le même plan.

2. Equation cartésienne

On note (P) le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P). Un vecteur normal au plan (P) est un vecteur directeur d'une droite orthogonal au plan (P).

Soit M un point du plan (P)

Que peut-on dire de $\overrightarrow{AM}$, $\vec{n}$?

On a donc :

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont ……………………

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow$

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow$

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow$

Une équation cartésienne du plan (P) est donc :

3. Exemples

Exemples :

1. Trouver une équation paramétrique du plan (P) passant par $A(2;-1;1)$ et de vecteurs directeurs (base de (P)) : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Trouver une équation cartésienne du plan (P) passant par $B(-2,1,-1)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$

III. Equations d'une droite

1. Equation paramétrique

On note (D) une droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}$

Soit M un point de la droite (D)

Que peut-on dire de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$?

On a donc :

$M(x,y,z)\in(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=$

Une équation paramétrique de la droite (D) est donc :

$$\begin{cases} x = \\ \\ y = \\ \\ z = \end{cases}$$

Attention : Il n'y a pas qu'une seule équation paramétrique pour représenter une droite (D). Plusieurs représentations paramétriques peuvent représenter la même droite.

2. Equation cartésienne

Une droite, dans l'espace, est l'intersection de deux plans (P) et (P')
On note (P) le plan d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$
et (P') le plan d'équation cartésienne : $a'x+b'y+c'z+d'=0$

Soit $M\in(D)=(P)\cap(P')$

- $M\in(D)\Rightarrow M\in(P)\Rightarrow$ ………………………………

- $M\in(D)\Rightarrow M\in(P')\Rightarrow$ ………………………………

Donc une équation cartésienne de (D) est

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$