Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 11
Lois de probabilité continues

Année :

2014-2015

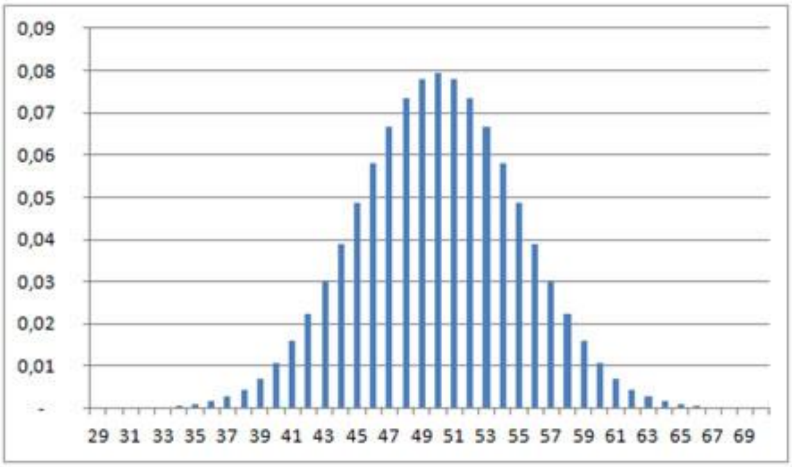
Laplace (1749-1827)

Citation du moment :

« [...] Dans le petit nombre de choses que nous pouvons savoir avec certitude [...], les principaux moyens de parvenir à la vérité [...] se fondent sur les probabilités.» (Pierre-Simon de Laplace)

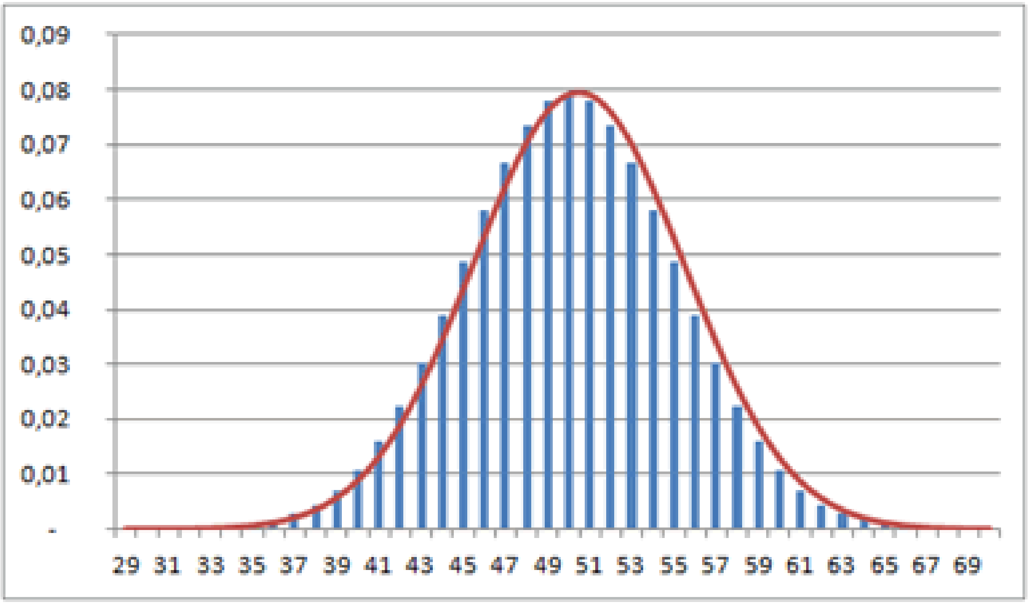
I. Définition d'une densité de probabilité

En première et en terminale, nous avons rencontré pour l'instant, des variables aléatoires discrètes X. Une variable aléatoire discrète est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^+$ avec $X(\Omega)$ un ensemble fini ou dénombrable. On peut donc indexer les éléments de $X(\Omega)$ par des indices de $\mathbb{N}$. $X(\Omega)=\{x_i\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ La loi de probabilité de X est donc donnée par la valeur de $P(X=x_i)$ pour tout $i\in I$. On obtient alors un diagramme en barre, comme celui-ci :



Remarques : 1) $P(\Omega)=\sum_{i\in I}P(X=x_i)=1$ 2) $P(X\le k)=\sum_{x_i\le k}P(X=x_i)$

Supposons maintenant que $X(\Omega)$ ne soit pas un ensemble discret mais continue. On doit donc obtenir une représentation graphique comme celle-là :



Quelles propriétés doit vérifier la fonction décrite par la courbe rouge ?

Définition 01 :

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle densité de probabilité sur I, toute fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- La fonction f est
- La fonction f est
- $\int_a^b f(x)dx =$

Exemples :

- $f : x \mapsto \frac{1}{3}$ sur $[0;4]$

- $f : x \mapsto 2x$ sur $[0;1]$

- $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ sur $[0;+\infty[$

Définition 02 :

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité f sur $I=[a,b]$ lorsque pour tout intervalle $J=[\alpha;\beta]\subset I$, on a

$$P\left(X\in J\right)=P\left(\alpha\leq x\leq\beta\right)=\int_{x\in J} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Remarques importantes :

Soit $c\in I$

1) $P\left(X=c\right)=\int_{c}^{c} f(x)dx=0$

La probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle.

On a donc :

$$P\left(x\in[\alpha,\beta]\right)=P\left(x\in]\alpha,\beta]\right)=P\left(x\in[\alpha,\beta[\right)=P\left(x\in]\alpha,\beta[\right)$$

2) $P(X<c)=\int_{a}^{c} f(x)dx$

Définition 03

Si X est une variable aléatoire à densité f sur $[\alpha,\beta]$. Si $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ existe alors l'espérance mathématique de X est $E(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$.

Exemples :

- $f : x \mapsto \frac{1}{3}$ sur $[0;4]$

- $f : x \mapsto 2x$ sur $[0;1]$

II. La loi uniforme $U([a,b])$

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[a,b]$.

Soit J un intervalle de $[a,b]$ alors la probabilité que ce nombre soit dans J est :

$$P(c \in J) = \frac{longueur\ de\ J}{longueur\ de\ [a,b]}$$

On admet que ce problème correspond à une densité de probabilité constante sur $[a,b]$.

On cherche donc un réel $k \in \mathbb{R}^+$ pour que $f : x \mapsto k$ soit une densité de probabilité sur $[a,b]$.

Définition 04

Une variable aléatoire réelle suit un loi uniforme sur $[a,b]$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction définie sur $[a,b]$ par $f : x \mapsto$ ………

Proposition :

Si $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ alors $P\left(X \in [\alpha;\beta]\right) = P\left(\alpha \leq X \leq \beta\right) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$

Démonstration :

Proposition :

Si X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ alors $E(x) = \dfrac{a+b}{2}$

Démonstration :

Exercices de la fiche01

III. La loi exponentielle $P(\lambda)$

Définition 05

$\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

Proposition :

Si X suit une loi $P(\lambda)$ alors pour tout réels positifs $a \leq b$

- $P(X \in [a,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$
- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$

Démonstration :

Proposition et définition : (Loi sans vieillissement ou sans mémoire)

X suit une loi $P(\lambda)$

Pour tout réels positifs t et h : $P_{(X\geq t)}(X\geq t+h)=P(X\geq h)$

Démonstration :

On admet que les lois exponentielles sont les seules lois sans mémoire.

Exemple : La durée de vie d'un atome radioactif suit une loi exponentielle.
Sa durée de vie n'est pas affectée par l'âge.

Proposition :

Si X suit une loi $P(\lambda)$ alors $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration : On pourra montrer que $F:x\mapsto\left(-x-\dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$ est une primitive de f

IV. La loi normale $N(\mu,\sigma^2)$

1. Loi normale centrée réduite $N(0,1)$

Définition 05 :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est appelée fonction de LAPLACE-GAUSS.

f est définie, continue, dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) =$

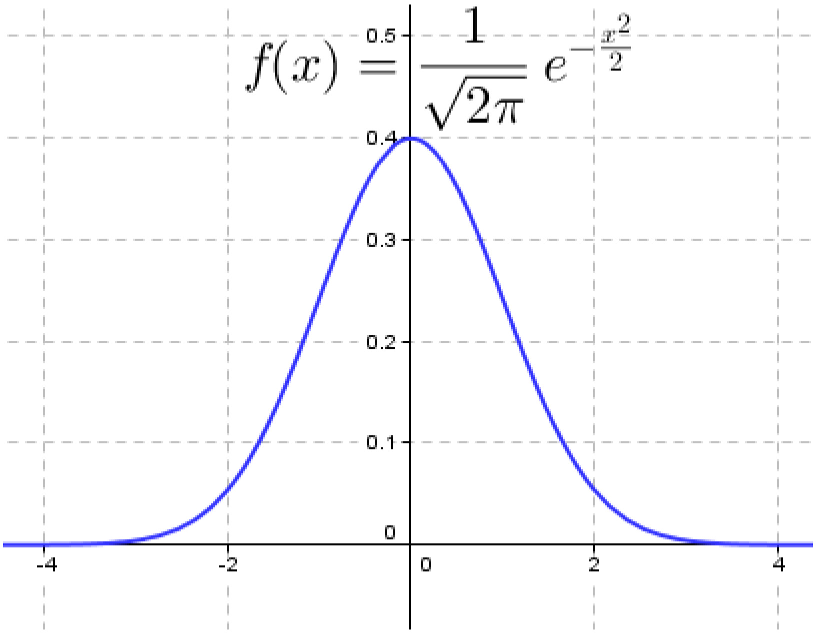
De plus

$f'(x) =$

En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ puis le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la limite de f en $\pm\infty$:

Sa représentation graphique se nomme la courbe de **GAUSS** ou courbe en cloche.



Théorème (admis car nous ne connaissons pas de primitive de *f*)

- $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$
- $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

Proposition :

La fonction de LAPLACE-GAUSS est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et elle définit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$

Proposition :

Si X suit une loi $N(0,1)$ alors $E(X)=0$ et $V(X)=1$

- Démonstration pour $E(X)$

- Admis pour $V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)=1$

Comment calculer des probabilités à l'aide de la loi $N(0,1)$ **?**

- A l'aide de la table (annexe) donnant des valeurs approchées de $P(X\leq z)$ où $z\geq 0$ et z donné au centième.

  Exemples : $P(X\leq 0,25)\approx 0,5987$

  On peut en déduire $P(X>0,25)=1-P(X\leq 0,25)\approx 1-0,5987\approx 0,4013$

  Mais aussi :

  $P(X\leq -0,25)=P(X\geq 0,25)=P(X>0,25)\approx 0,4013$

  Et enfin :

  $P(0,3\leq X\leq 0,7)=P(X\leq 0,7)-P(X\leq 0,3)\approx 0,1401$

  Exercice :

  Déterminer

  - $P(X\leq 2,22)$
  - $P(X\leq -2,22)$
  - $P(-2,22\leq X\leq 0)$

- A l'aide de votre calculatrice : Distrib (2nde Var)

  $P(a\leq X\leq b)\mapsto normal\ Frep(a,b,0,1)$

  Voir l'annexe sur la calculatrice pour les autres possibilités.

  Exercice :

  Déterminer :

  - $P(0,3\leq X\leq 0,7)$
  - $P(X\leq 0,25)$
  - $P(X<-0,7)$

Théorème :

X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi $N(0,1)$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif μ_α tel que $P(-\mu_\alpha \leq X \leq \mu_\alpha) = 1-\alpha$

Démonstration exigible au BAC :

X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi $N(0,1)$.

Soit $g : t \mapsto P(-t \leq X \leq t)$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ alors $g(t) = \int_{-t}^{t} f(x)dx$ où f fct GAUSS-LAPLACE

- Montrer que $g(t) = \int_{0}^{t} 2f(x)dx$

- Calculer $g'(t)$ et $\lim_{t \mapsto +\infty} g(t)$

- En déduire le tableau des variations de g

- Conclure :

Exemple :

- Recherche de seuils μ_α pour $\alpha = 0,05$

  X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi $N(0,1)$.

  $P(\mu_{0,05} \leq X \leq \mu_{0,05}) = 0,95$

  $\Leftrightarrow P(X \leq \mu_{0,05}) - P(X \leq -\mu_{0,05}) = 0,95$

  $\Leftrightarrow P(X \leq \mu_{0,05}) - \left[1 - P(X \leq \mu_{0,05})\right] = 0,95$

  $\Leftrightarrow 2P(X \leq \mu_{0,05}) = 1,95$

  $\Leftrightarrow P(X \leq \mu_{0,05}) = 0,975$

  Il reste à trouver la valeur de $\mu_{0,05}$ dans une table ou avec votre calculatrice à l'aide de la fonction FracNormal(0,975,0,1).

Quelques valeurs à connaître par cœur :

$P(X \in [-1;1]) \approx 0,68$ $\quad$ $P(X \in [-1.96;1.96]) \approx 0,95$

$P(X \in [-2;2]) \approx 0,954$ $\quad$ $P(X \in [-3;3]) \approx 0,997$

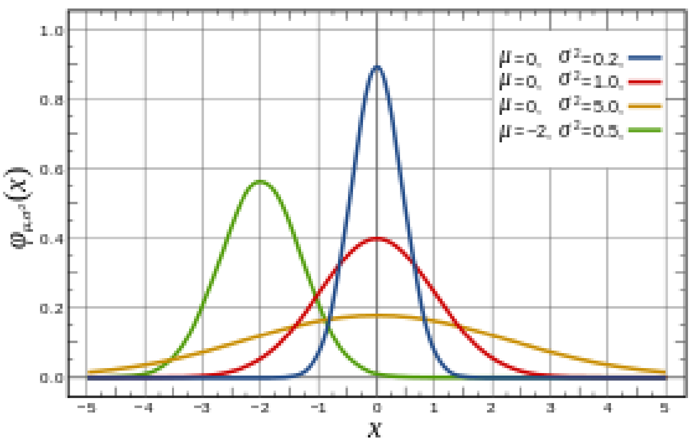
2. Loi normale $N(\mu, \sigma^2)$

Définition 06

μ est un réel et σ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 notée $N(\mu, \sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $N(0,1)$

Remarque : La fonction de densité de X est $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Influence de μ et σ sur la courbe de GAUSS :



- μ définit l'abscisse du …………………… De la fonction densité.
- σ définit la hauteur du …………………… De la fonction densité. Plus σ est grand et plus le …………………… est ………….. puis plus σ est petit et plus le …………………… est …………..

Proposition :

Si X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi $N(\mu,\sigma^2)$ alors

$$E(X)=\mu \text{ et } V(X)=\sigma^2$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation …………..
et σ mesure la dispersion autour de la moyenne μ.

Calcul de probabilités :

- Avec la calculatrice.

- En revenant à une loi normale centrée réduite puis à l'aide d'une table.

  Exemple :
  X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi $N(5,2)$
  $P(X\leq 7)=P\left(\frac{X-5}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{2}\right)=P(Y\leq\sqrt{2})$ avec Y qui suit une loi $N(0,1)$