Calcul d'intégrale

I. Intégrale d'une fonction continue positive

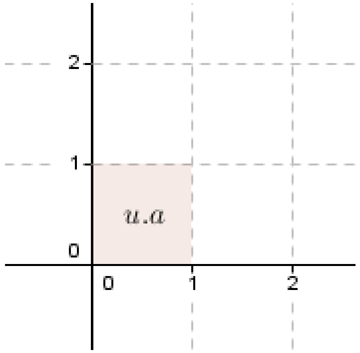
1. Activité de découverte

Activité 01 et activité 02 en fichiers annexes joints

2. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition 01 (Unité d'aire)



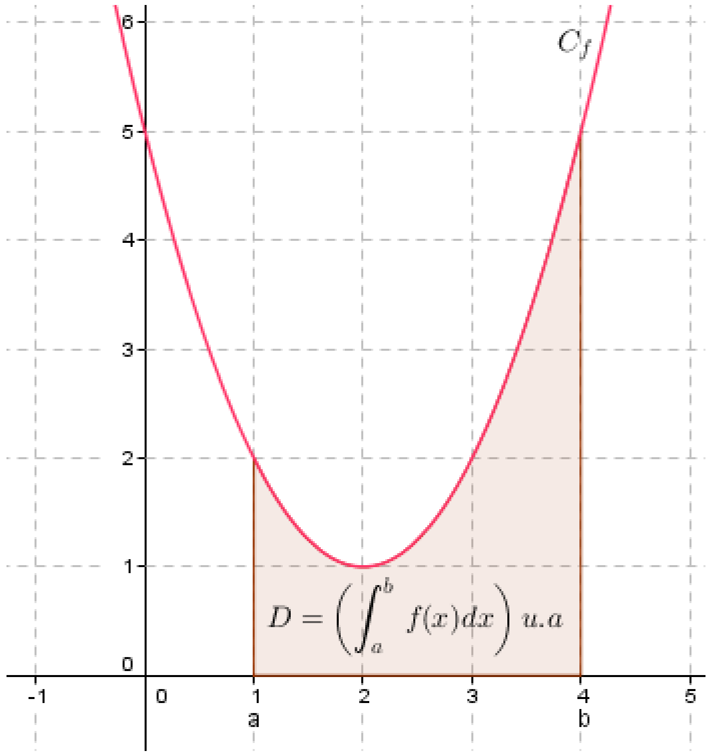
L'aire du rectangle OIKJ définit **l'unité d'aire** noté $u.a$

Définition 02 (Intégrale de a à b de f)

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et C_f sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'intégrale de de a à b de f est l'aire, exprimée en $u.a$, du domaine D délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Remarques :

- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. C'est une variable muette $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$.
- a et b sont les bornes de l'intégrale et on a $a < b$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$

Théorème 01 :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$

II. Primitive d'une fonction continue

1. Définition et propriétés

Définition 03 :

f est définie sur un intervalle I.

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

Propriétés

- Si f admet une primitive F sur I alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f sur I.
- Si f admet des primitives sur I, alors il en existe une seule vérifiant $F(a) = b$

2. Tableaux des primitives

Formules pour trouver une primitive des fonctions usuelles :

Fonctions f	Sur …	Une primitive F
$f : x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto kx$
$f : x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}, n > 1$	$]-\infty;0[\ ou \ ]0;+\infty[$	$F : x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	$F : x \mapsto \ln x$
$f : x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto e^x$
$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$F : x \mapsto \sqrt{x}$

$f : x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \sin x$
$f : x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto -\cos x$

Formules générales pour trouver une primitive d'une fonction :

Fonctions	Une primitive
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)$
$u'(x)-v'(x)$	$u(x)-v(x)$
$k\times u'(x)$	$k\times u(x)$
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^n}$ avec $u\neq 0$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u>0$	$\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$ avec $u>0$	$\ln u$

3. Cas des fonctions positives et continues

Théorème 02

Si f est continue positive sur $[a,b]$ alors $\phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a. Toutes les primitives de f sont les fonctions F telles que $F(x)=\phi(x)+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Proposition :

Si f continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Théorème 03 :

Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I

Remarque : Il existe des fonctions discontinues sur I et qui admettent des primitives sur I.

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Extension de la définition

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. a et b sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Théorème (admis) :

f est une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

2. Propriétés

Relation de Chasles : f est continue sur I et a, b, c sont des nombres de I.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Linéarité : f et g sont continues sur I et a, b sont des nombres de I et $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Positivité : f est continue sur $[a,b]$

$$\text{Si } \begin{cases} f \geq 0 \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Conservation de l'ordre : f et g sont continues sur $[a,b]$

$$\text{Si } \begin{cases} f \leq g \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Inégalité de la moyenne et Valeur moyenne

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$