

Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 09 : Les Intégrales

Année :

2014-2015



Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826-1866



Henri Lebesgue
1874-1941

Citation du moment :

«Le seul enseignement qu'un professeur peut donner, à mon avis, est de penser devant ses étudiants. » (Henri Léon Lebesgue)

I. Intégrale d'une fonction continue positive

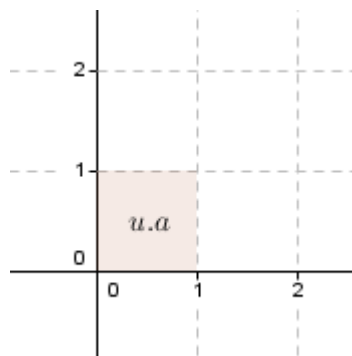
1. Activité de découverte

Activité 01 et activité 02 en fichiers annexes joints

2. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthogonale (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 01 (Unité d'aire)



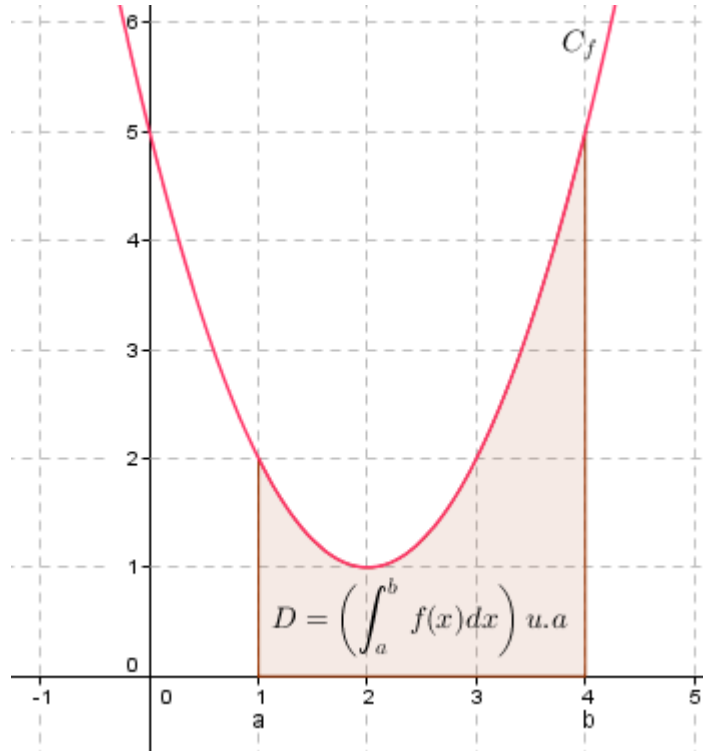
L'aire du rectangle OIKJ définit l'**unité d'aire** noté $u.a$

Définition 02 (Intégrale de a à b de f)

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et C_f sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en $u.a$, du domaine D délimitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Remarques :

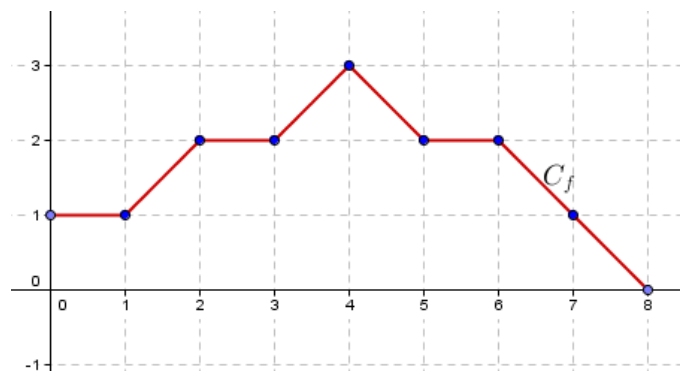
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. C'est une variable muette $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$.
- a et b sont les bornes de l'intégrale et on a $a < b$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Exemple :

Calculer $\int_0^8 f(x)dx$

f est continue et positive sur l'intervalle $[0,8]$ et

$$\int_0^8 f(x)dx =$$



3. Fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(x)dx$

Théorème 01 :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$

alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$

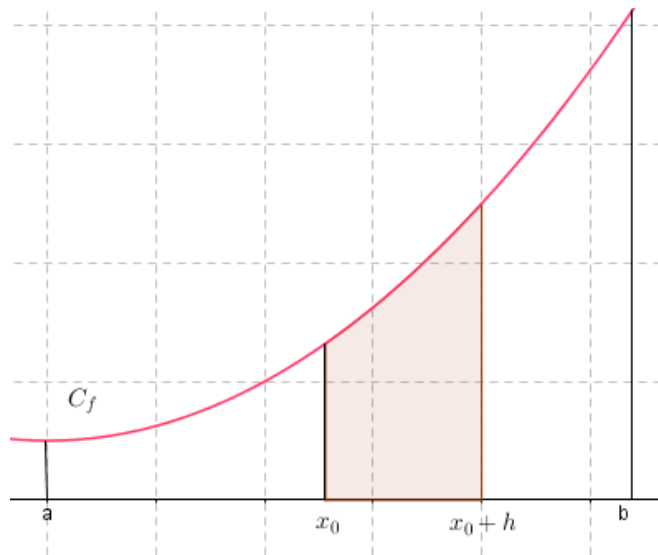
Démonstration :

➤ On note f une fonction continue, positive et croissante sur $[a, b]$

On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

On note $x_0 \in [a, b]$ et $h \neq 0$ avec $h > 0$

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \dots\dots\dots$$



Comme f est croissante sur $[a, b]$ alors on peut encadrer $F(x_0 + h) - F(x_0)$ par
 $\dots\dots\dots \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq \dots\dots\dots$

➤ En déduire $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$

➤ Refaire la démonstration si $h < 0$

➤ Refaire la démonstration si f est décroissante sur $[a, b]$

➤ Conclusion :

II. Primitive d'une fonction continue

1. Définition et propriétés

Définition 03 :

f est définie sur un intervalle I .

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

Exemples :

- Trouver une primitive de $f : x \mapsto 2$ sur \mathbb{R}

- Trouver une primitive de $f : x \mapsto x$ sur \mathbb{R}

- Trouver une primitive de $f : x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}

- Trouver une primitive de $f : x \mapsto e^x$ sur \mathbb{R}

- Trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}

Propriétés

- Si f admet une primitive F sur I alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f sur I .

Démonstration :

- Si f admet des primitives sur I , alors il en existe une seule vérifiant $F(a) = b$

Démonstration :

Exemple : Trouver la primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(0) = 1$

2. Tableaux des primitives

Formules pour trouver une primitive des fonctions usuelles :

Fonctions f	Sur ...	Une primitive F
$f : x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$F : x \mapsto kx$
$f : x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	$F : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}, n > 1$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$	$F : x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$] 0; +\infty[$	$F : x \mapsto \ln x$
$f : x \mapsto e^x$	\mathbb{R}	$F : x \mapsto e^x$
$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$	$F : x \mapsto \sqrt{x}$
$f : x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}	$F : x \mapsto \sin x$
$f : x \mapsto \sin x$	\mathbb{R}	$F : x \mapsto -\cos x$

Formules générales pour trouver une primitive d'une fonction :

Fonctions	Une primitive
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x)$
$u'(x) - v'(x)$	$u(x) - v(x)$
$k \times u'(x)$	$k \times u(x)$
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}$ avec $u \neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u > 0$	\sqrt{u}
$u' e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln u$

3. Cas des fonctions positives et continues

Théorème 02

Si f est continue positive sur $[a, b]$ alors $\phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a, b]$ s'annulant en a . Toutes les primitives de f sont les fonctions F telles que $F(x) = \phi(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration :

Proposition :

Si f continue et positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Démonstration :

Théorème 03 :

Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I

Démonstration dans le cas où $I = [a, b]$

Remarque : Il existe des fonctions discontinues sur I et qui admettent des primitives sur I .

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Extension de la définition

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I . a et b sont deux nombres quelconques de I . L'intégrale de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On écrit aussi : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemples :

- $\int_{-1}^2 -3x dx =$
- $\int_1^{-1} t^2 dt =$
- $\int_0^\pi \cos \theta d\theta =$

Théorème (admis) :

f est une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

2. Propriétés

Relation de Chasles : f est continue sur I et a, b, c sont des nombres de I .

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Linéarité : f et g sont continues sur I et a, b sont des nombres de I et $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Positivité : f est continue sur $[a, b]$

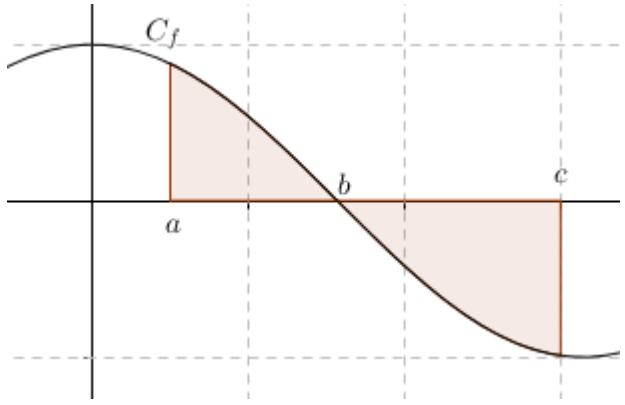
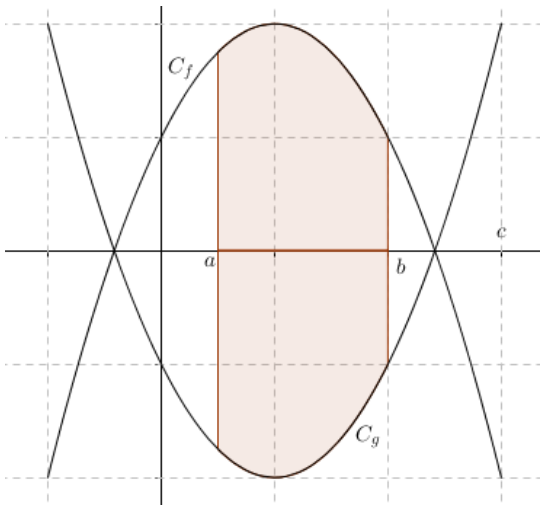
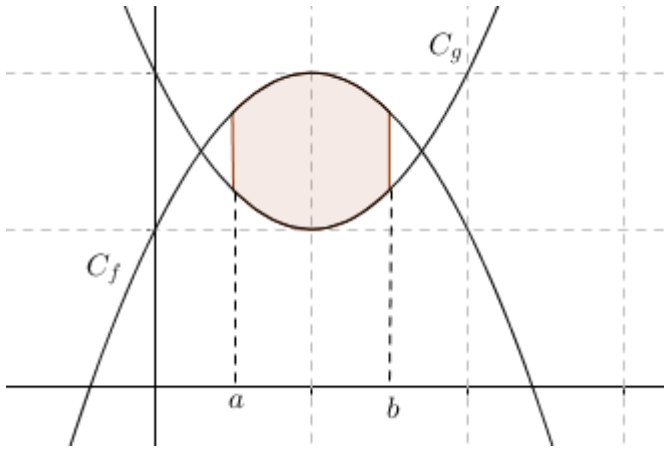
$$\text{Si } \begin{cases} f \geq 0 \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Conservation de l'ordre : f et g sont continues sur $[a, b]$

$$\text{Si } \begin{cases} f \leq g \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Conséquences sur le calcul d'aires.

Exemples :

	<p>L'aire grisée en u.a est</p> $A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$
	<p>L'aire grisée en u.a est</p> $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
	<p>L'aire grisée en u.a est</p> $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

4. Inégalité de la moyenne et Valeur moyenne

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Démonstration :**Définition :**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$