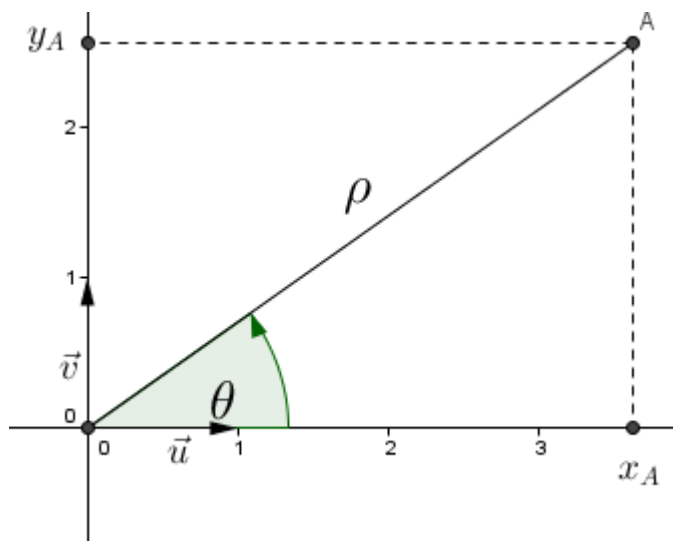


Les complexes (Partie II)

I. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe

1. Découverte

Soit A d'affixe $z_A = x_A + iy_A$ dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) ,
 $\rho = OA$ puis $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) [2\pi]$



2. Définition et propriétés

Définition :

Soit z_A un nombre complexe non nul, affixe d'un point A dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

L'écriture trigonométrique de z_A est $z_A = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

avec $\rho \geq 0$

Avec $\rho =$ et

$\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) [2\pi]$

Vocabulaires

- On dira que $[\rho, \theta]$ sont **les coordonnées polaires** de A dans le repère (A, \vec{u})
- ρ se nomme « **le module de z_A** » et se note aussi $|z_A|$
- θ se nomme « **un argument de z_A** » et se note aussi $\arg(z_A)$

3. Propriétés

On note $z = a + ib$ un complexe non nul.

- $|z|^2 = z \bar{z}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |a|$
- $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |z| = |b|$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') [2\pi] \end{cases}$

4. Application à la géométrie

On note $A(z_A)$ et $B(z_B)$ dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})

$$\begin{cases} AB = |z_{\overline{AB}}| = |z_B - z_A| \\ \arg(z_{\overline{AB}}) = \arg(z_B - z_A) \end{cases}$$

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

1. Introduction

Définition :

Si z est un complexe non nul, d'argument θ , alors z peut s'écrire sous la forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$

Conséquence :

- Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est de module 1 et d'argument θ . Son point image se situe sur le cercle trigonométrique.
- Si $z = a + ib$ est un complexe non nul et si $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta [2\pi]$ alors

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

Petite curiosité :

Démontrer que $e^{i\pi} + 1 = 0$

2. Propriétés

On note z et z' deux complexes non nuls :

a. Propriétés sur les modules

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$

b. Propriétés sur les arguments

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

c. Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

d. Formules d'addition de trigonométrie.

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$$

$$\sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta$$

e. Formules d'Euler (hors programme)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$