Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 08 : Les Complexes (Partie II)

Année :

2014-2015

Henri CARTAN

Né le 8 juillet 1904 et mort le 13 août 2008. A travaillé sur les fonctions à variables complexes.

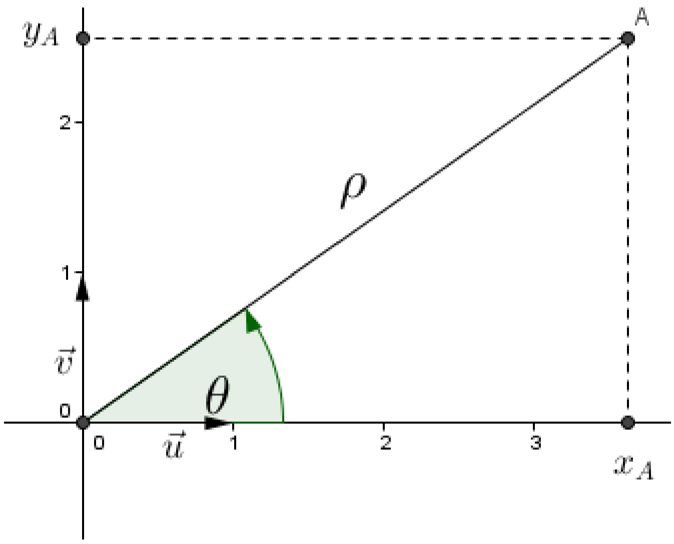
Citation du moment :

« La Nature est écrite dans la langue mathématique,
sans elle il est humainement impossible d'en comprendre une parole,
dans elle cela revient à tourner vainement dans un labyrinthe obscure. » (Galileo Galilei)

I. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe

1. Découverte

Soit A d'affixe $z_A = x_A + iy_A$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, $\rho = OA$ puis $\theta = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$



a. Déterminer $\cos\theta$ en fonction de x_A et ρ

b. Déterminer $\sin\theta$ en fonction de y_A et ρ

c. Déterminer ρ en fonction de x_A et y_A

d. Déterminer x_A en fonction de ρ et θ

e. Déterminer y_A en fonction de ρ et θ

f. Conclusion

2. Définition et propriétés

Définition :

Soit z_A un nombre complexe non nul, affixe d'un point A dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

L'écriture trigonométrique de z_A est $z_A = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \geq 0$

Avec $\rho =$ et $\theta = (\vec{u},\overrightarrow{AB})\,[2\pi]$

Vocabulaires

- On dira que $[\rho,\theta]$ sont **les coordonnées polaires** de A dans le repère $(A,\vec{u})$
- ρ se nomme « **le module de z_A** » et se note aussi $|z_A|$
- θ se nomme « **un argument de z_A** » et se note aussi $\arg(z_A)$

3. Exemples

$$z = 1 + i$$

$|z| = \rho =$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} = \end{cases} \qquad \Rightarrow \theta = \arg(z) =$$

L'écriture trigonométrique de z est donc $z =$

$$z = \sqrt{3} + i$$

$|z| = \rho =$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} = \end{cases} \qquad \Rightarrow \theta = \arg(z) =$$

L'écriture trigonométrique de z est donc $z =$

$$z = i$$

$|z| = \rho =$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} = \end{cases} \qquad \Rightarrow \theta = \arg(z) =$$

L'écriture trigonométrique de z est donc $z =$

4. Propriétés

On note $z = a + ib$ un complexe non nul.

- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |a|$
- $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |z| = |b|$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0\,[\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\,[2\pi] \end{cases}$

Démonstration :

5. Application à la géométrie

On note $A(z_A)$ et $B(z_B)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

$$\begin{cases} AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| \\ \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) \end{cases}$$

Exemple :

On note $A(1+i)$ et $B(1-i\sqrt{3})$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

Calculer AB et $(\vec{u},\overrightarrow{AB})$ puis $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

Exercice :

Calculer le module et l'argument de $Z = \dfrac{1+i}{1-i}$

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

1. Introduction

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f:\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Montrer que pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$
- Calculer $f(0)$
- Si on admet que les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que celles des fonctions réelles, alors déterminer $f'(\theta)$

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g:\theta \mapsto e^{i\theta}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

- Montrer que pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $g(\theta+\theta') = g(\theta)\times f(\theta')$
- Calculer $g(0)$
- Si on admet que les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que celles des fonctions réelles, alors déterminer $g'(\theta)$

- Que peut-on en conclure ?

Définition :

Si z est un complexe non nul, d'argument θ , alors z peut s'écrire sous la forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$

Conséquence :

- Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est de module 1 et d'argument θ . Son point image se situe sur le cercle trigonométrique.

- Si $z = a + ib$ est un complexe non nul et si $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta\,[2\pi]$ alors

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Petite curiosité :

Démontrer que $e^{i\pi} + 1 = 0$

Exercice :

- Mettre $z=2-2i$ sous forme exponentielle

- Mettre $z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ sous forme exponentielle

- Mettre $z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme exponentielle

2. Propriétés

On note z et z' deux complexes non nuls :

a. Propriétés sur les modules

- $|zz'| = |z| \times |z|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$

b. Propriétés sur les arguments

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration :

c. Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Démonstration :

d. Formules d'addition de trigonométrie.

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$
$$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$$

Démonstration :

e. Formules d'Euler (hors programme)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

Démonstration :