Fonction logarithme

I. Introduction et définition

1. Activité d'introduction

Définition 01 :

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x$ est l'unique nombre dont l'exponentielle vaut x : $e^{\ln x} = x$

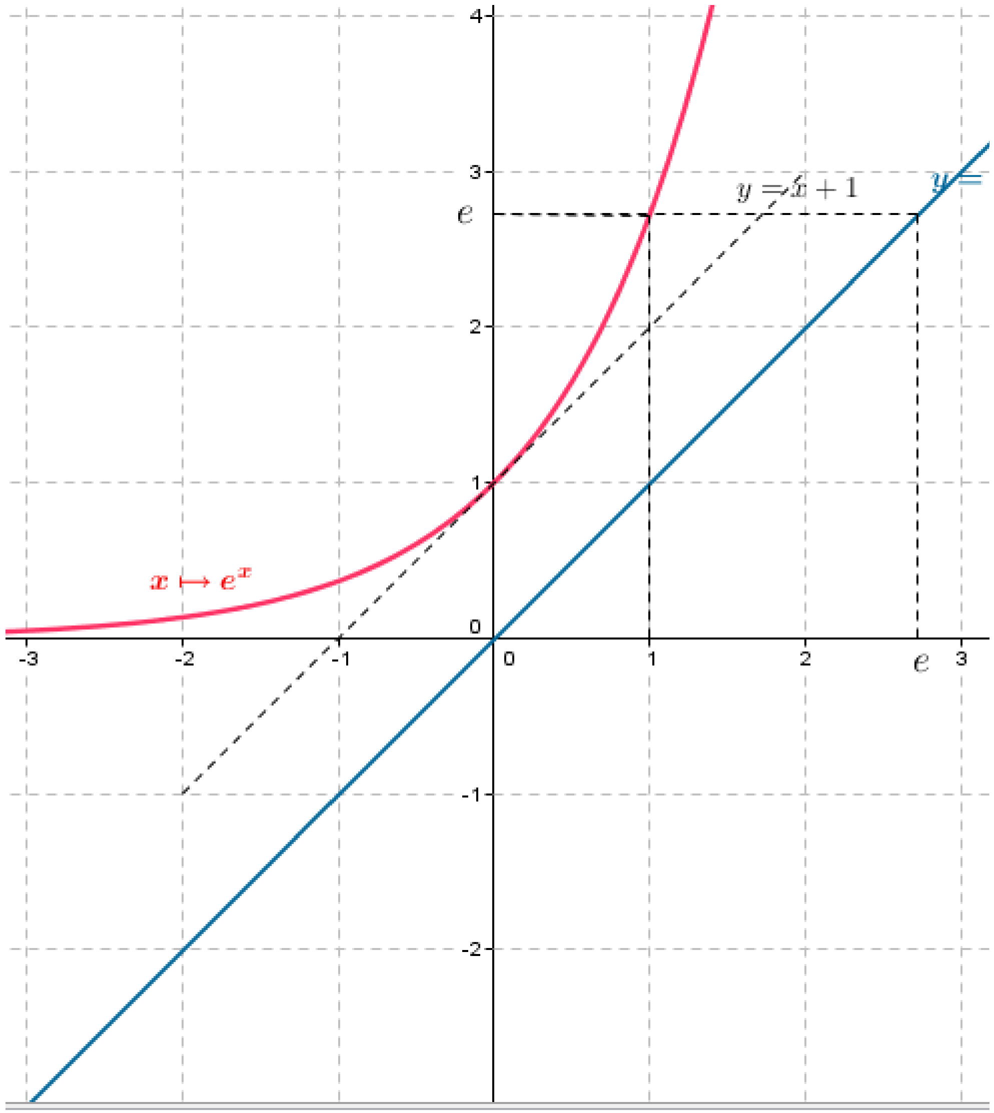
Définition 02 :

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à tout $x \in]0;+\infty[$ elle lui associe le nombre réel noté $\ln x$ tel que $e^{\ln x} = x$

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

2. Conséquences

- Pour obtenir la courbe de la fonction logarithme, il faut faire la symétrie de la courbe de la fonction exponentielle, par rapport à la droite d'équation $y = x$



- $D_f =]0;+\infty[$
- $\forall x>0,\quad e^{\ln x}=x$ et $\forall x\in\mathbb{R},\quad \ln\left(e^x\right)=x$
- $\ln 1=0$ et $\ln e=1$
- $\forall x>0\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}\ :\ y=\ln x \iff x=e^y$
- $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1)=1$
- L'équation réduite de la tangente à la courbe du logarithme népérien, au point d'abscisse 1 est $y=x-1$

II. Propriétés du logarithme népérien

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\forall n\in\mathbb{R}\ ,\ \ln\left(a^n\right)=n\times\ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$

Théorème 01 :

Le fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Conséquences :

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln a<\ln b \iff \ldots\ldots<\ldots\ldots$
- $\ln a=\ln b \iff \ldots\ldots=\ldots\ldots$
- $\ln a>0 \iff a>\ldots\ldots$
- $\ln a<0 \iff \ldots\ldots<a<\ldots\ldots$

Théorème 02 :

Soit une fonction u dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction $f: x\mapsto \ln\left[u(x)\right]$ est dérivable sur I et pour tout x de I

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

III. Limites

Théorème 03 : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0}\ln x=-\infty$

Théorème 04 : $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 0}x^n\ln x=0$$

Théorème 05 :

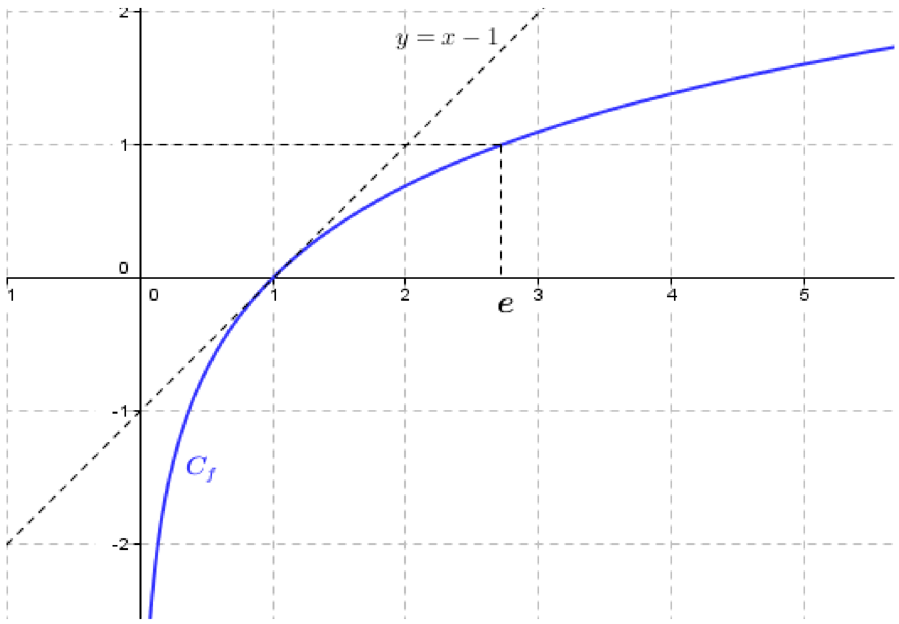
$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

IV. Etude de la fonction logarithme

1. Tableau des variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Courbe représentative



V. Suppléments

- Pour $a>0$ et $n\in\mathbb{Z}$: $a^n=e^{\ln(a^n)}=e^{n\ln a}$
- La fonction **logarithme décimal** est la fonction notée $\log$ définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques :

$\log 10=1$; $\log 100=2$; $\log 10^n=n$ $(n\in\mathbb{Z}^*)$