Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 06

La fonction logarithme népérien

Année :

2014-2015

Johan Napier (Neper)
(1550-1617)
Inventeur du logarithme

Citation du moment :

«Le but des mathématiques est de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles.» (Auguste Comte)

I. Introduction et définition

1. Activité d'introduction

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, quel est le nombre de solution de l'équation $e^y = x$?

Définition 01 :

Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln x$ est l'unique nombre dont l'exponentielle vaut x : $e^{\ln x} = x$

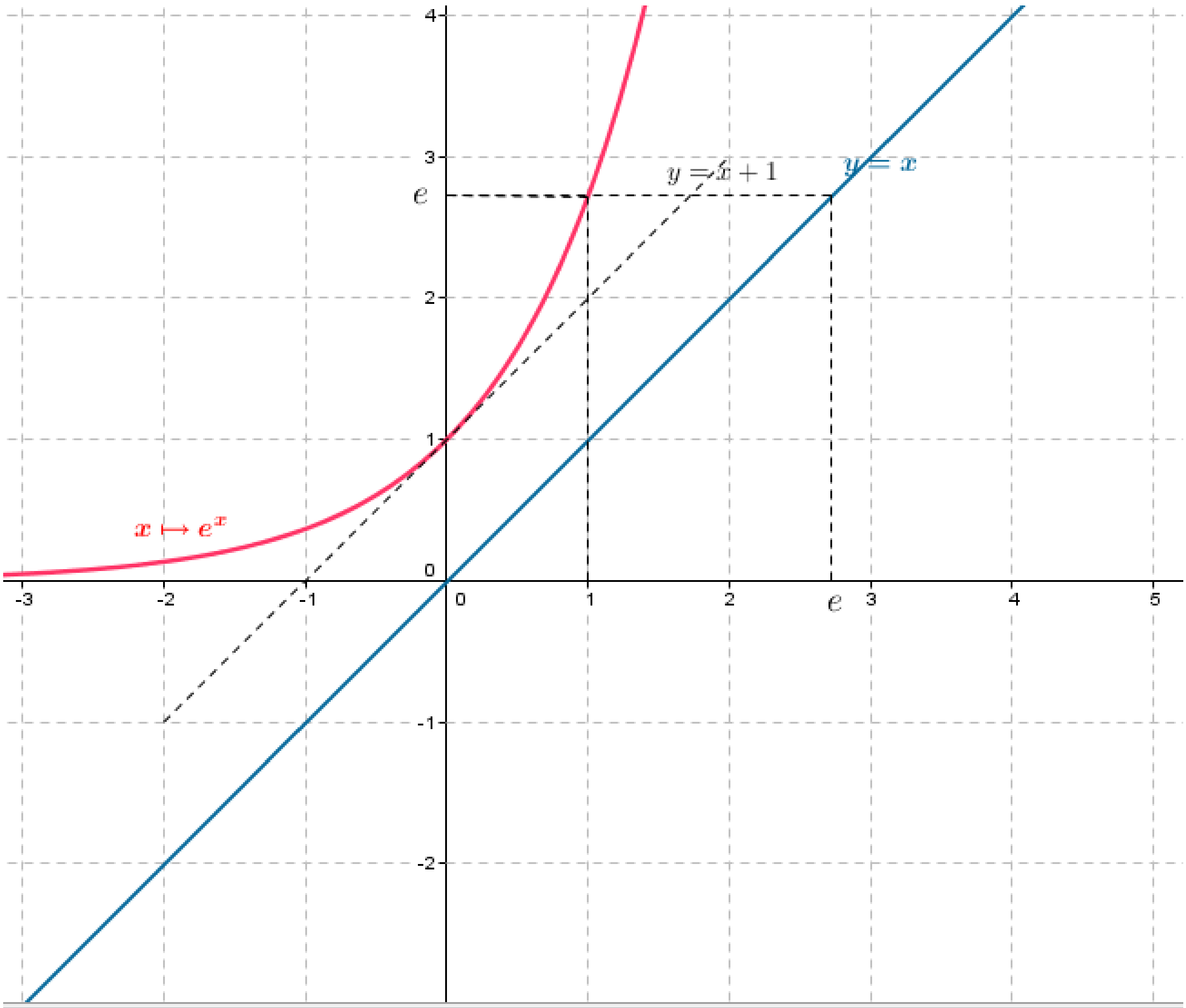
Définition 02 :

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à tout $x \in]0;+\infty[$ elle lui associe le nombre réel noté $\ln x$ tel que $e^{\ln x} = x$

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

2. Conséquences

- Pour obtenir la courbe de la fonction logarithme, il faut faire la symétrie de la courbe de la fonction exponentielle, par rapport à la droite d'équation $y = x$



- $D_f = \dots\dots\dots$
- $\forall x > 0, \quad e^{\ln x} = \dots\dots$ et $\ln\left(e^x\right) = \dots\dots$
- $\ln 1 = \dots\dots$ et $\ln e = \dots\dots$
- $\forall x > 0 \ , \ \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dots\dots$
- $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dots\dots$
- L'équation réduite de la tangente à la courbe du logarithme népérien, au point d'abscisse 1 est $y = \dots\dots\dots\dots$

II. Propriétés du logarithme népérien

Propriétés : a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\forall n\in\mathbb{R}$, $\ln\left(a^n\right)=n\times\ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$

Démonstrations :

III. Variations

Théorème 01 :

Le fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Démonstration :

Pour $a\in]0;+\infty[$, on cherche $\lim\limits_{x\mapsto a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$

1. Déterminer, si elle existe, cette limite en posant $y=\ln x$ et $b=\ln a$.
2. Conclure

Conséquences :

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

a et b sont deux réels strictement positifs.

- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow \ldots\ldots<\ldots\ldots$
- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow \ldots\ldots=\ldots\ldots$
- $\ln a>0 \Leftrightarrow a>\ldots\ldots$
- $\ln a<0 \Leftrightarrow \ldots\ldots<a<\ldots\ldots$

Théorème 02 :

Soit une fonction u dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction $f : x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ est dérivable sur I et pour tout x de I

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration :

IV. Limites

Théorème 03 : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \ln x = -\infty$

Démonstration

- Pour tout $A > 0$, dès que $x > e^A$ alors $\ln x \in \left]\ldots\ldots;\ldots\ldots\right[$ donc par définition $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x = \ldots\ldots$
- En posant $x = \frac{1}{X}$, montrer alors que $\lim\limits_{x \mapsto 0} \ln x = -\infty$

Théorème 04 : $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto 0} x^n \ln x = 0$$

Démonstration :

Théorème 05 :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Démonstration : on note f la fonction logarithme népérien.

- $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x+1) - f(1)}{x}$:

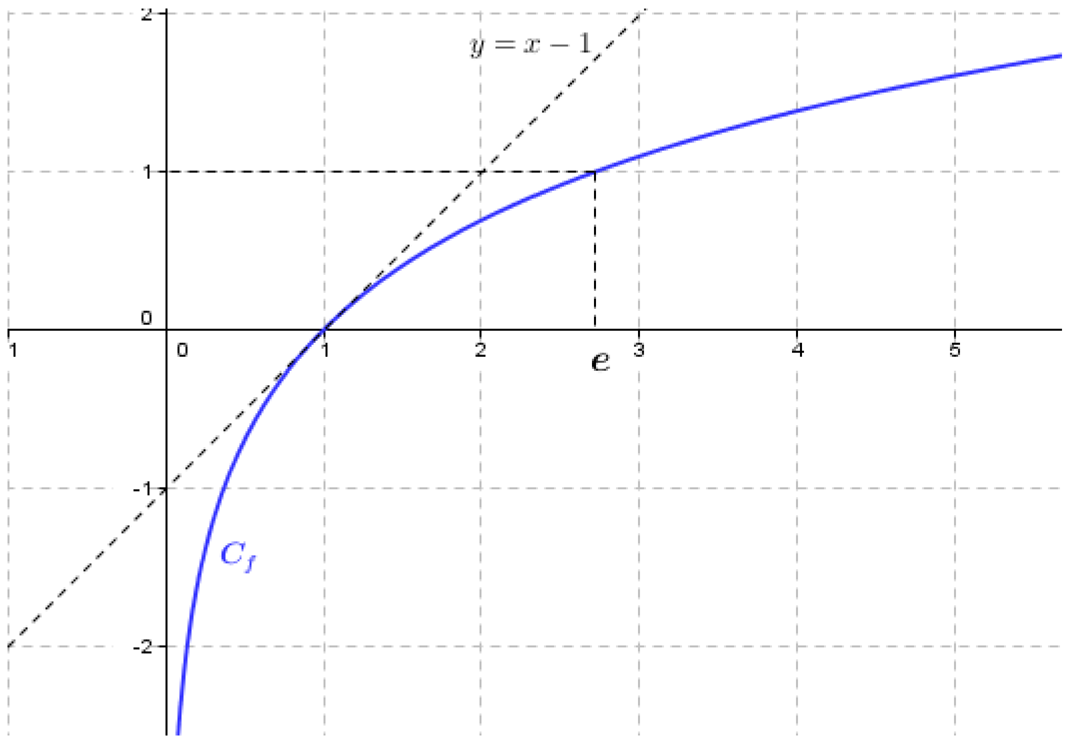
- $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$:

V. Etude de la fonction logarithme

1. Tableau des variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. Courbe représentative



VI. Suppléments

- Pour $a>0$ et $n\in\mathbb{Z}$: $a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln a}$

- La fonction **logarithme décimal** est la fonction notée $\log$ définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques : $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 10^n = n$ ($n\in\mathbb{Z}^*$)