Fonction Exponentielle

I. Introduction et découverte de la fonction exponentielle

1. Existence et définition et unicité

Propriété :

Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors, pour tout réel x, on a $f(x)f(-x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$.

Théorème :

Il <u>existe</u> une <u>unique</u> fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

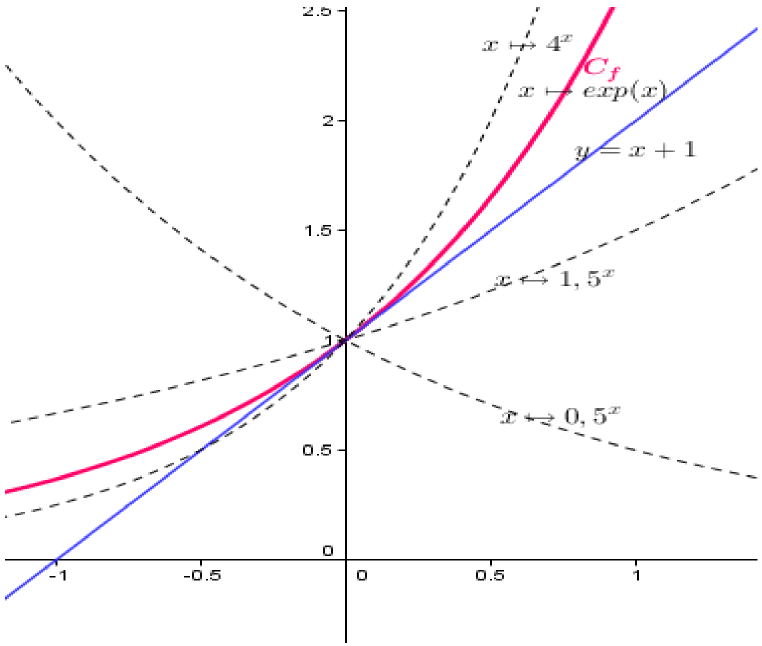
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**

Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$

2. Autre définition

Définition :

La fonction $\exp$ est l'unique fonction f de la forme $x \mapsto q^x$ dont la courbe représentative admet une tangente d'équation $y = x + 1$ au point d'abscisse 0. Si on note e l'image de 1 par cette fonction alors on a $q = e$ et $f(x) = e^x$



II. Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et notation

La fonction exponentielle est l'unique fonction vérifiant

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On notera cette fonction $\exp : x \mapsto e^x$

Propriétés : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $\left(e^x\right)' = e^x$

2. Propriétés

Propriétés algébriques

Pour tout x et y réels et pour tout entier relatif n

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e \approx 2{,}718$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$

3. Variations

Théorème : La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Conséquence : f' et u' sont de mêmes signes.

Corollaire :

Si a et b sont deux nombres réels

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$
$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

4. Limites

Théorème : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$

Théorème : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

5. Tableau des variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

III. Courbe représentative