Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 06

La fonction exponentielle.

Année :

2014-2015

Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646-1716)

(Un des premiers à utiliser l'écriture q^x)

Citation du moment :

« La mathématique universelle … est une logique de l'imagination » (Gottfried Wilhelm Leibniz)

I. Introduction et découverte de la fonction exponentielle

1. Existence et définition et unicité

Propriété :

Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors, pour tout réel x, on a $f(x)f(-x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$.

Démonstration :

Théorème :

Il <u>existe</u> une <u>unique</u> fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0)=1$.

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**

Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0)=1$ et $\exp(x) \neq 0$

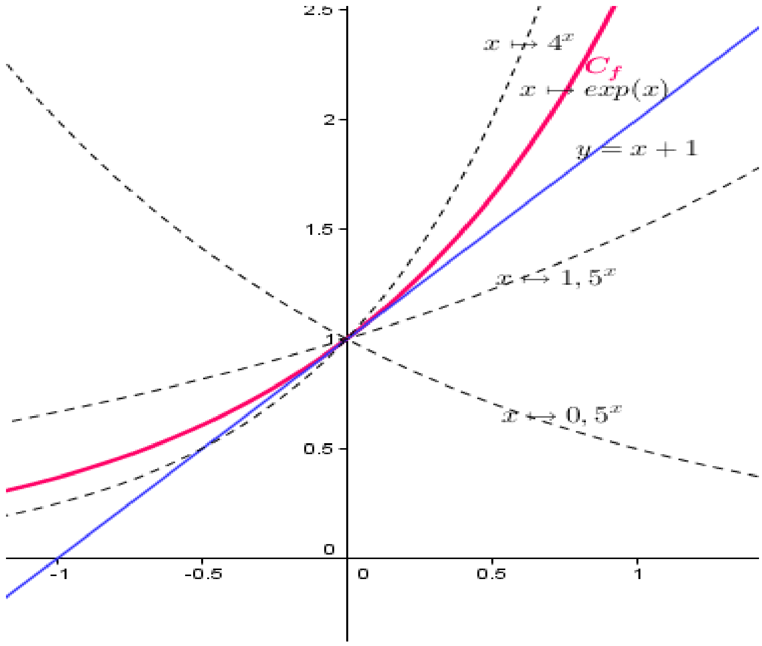
Démonstration : L'existence est admise en terminale (voir démonstration en fiche complément sur mon site internet)

L'unicité est une démonstration exigible au BAC

2. Autre définition

Définition :

La fonction $\exp$ est l'unique fonction f de la forme $x \mapsto q^x$ dont la courbe représentative admet une tangente d'équation $y = x+1$ au point d'abscisse 0. Si on note e l'image de 1 par cette fonction alors on a $q = e$ et $f(x) = e^x$



II. Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et notation

La fonction exponentielle est l'unique fonction vérifiant $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On notera cette fonction $\exp : x \mapsto e^x$

Propriétés : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $\left(e^x\right)' = e^x$

2. Propriétés

Propriétés algébriques

Pour tout x et y réels et pour tout entier relatif n

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^1 = e \approx 2{,}718$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$

Démonstration :

3. Variations

Théorème : La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration :

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Conséquence : f' et u' sont de mêmes signes.

Démonstration :

1) Déterminer $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{e^{u(x_0+h)} - e^{u(x_0)}}{u(x_0+h) - u(x_0)}$ et $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$

2) Conclure.

Corollaire :

Si a et b sont deux nombres réels

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$
$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

4. Limites

Théorème : $\lim_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$

Démonstration exigible au BAC

Théorème : $\lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Théorème « Croissance comparée » : (admis)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^n e^x = 0$

Exemples :

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^{4x}}{3x}$

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(e^{2x} - x^2 + 3x\right)$

- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^{2x}\left(-x^2 + 3x + 1\right)$

5. Tableau des variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

III. Courbe représentative