Complément : Existence de la fonction exponentielle

Démonstration de l'existence de la fonction exponentielle

Soit $x\in\mathbb{R}$ et les suites u et v définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

1. Montrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang.
2. Montrer que la suite v est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{v_n}=\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1-\dfrac{x^2}{n^2}\le\dfrac{u_n}{v_n}\le 1$
5. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le v_n-u_n\le\dfrac{x^2}{n^2}v_n$
6. Justifier que la suite v est bornée.
7. Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n-v_n=0$
8. En déduire que u et v sont convergentes.
9. On note $\ell(x)$ la limite de u et de v. Nous allons vérifier que la fonction ℓ est solution de $\begin{cases} f'=f \\ f(0)=1\end{cases}$
   a. Montrer que $\ell(0)=1$
   b. Montrer que pour $n>|x|$ et $h\in\mathbb{R}^*$ on a
   $$u_n(x+h)=u_n(x)\left(1+\frac{h}{n+x}\right)^n$$
   c. En déduire que pour $n>|x|$ et $h\in\mathbb{R}^*$ on a
   $$u_n(x+h)\ge u_n(x)\left(1+\frac{nh}{n+x}\right)$$
   d. En déduire que pour $h\in\mathbb{R}^*$, $\ell(x+h)-\ell(x)\ge\ell(x)h$
   e. En déduire que pour $h\in\mathbb{R}^*$, $\ell(x-h)-\ell(x)\ge-\ell(x)h$
   f. En déduire que pour $h\in\mathbb{R}^*$, $(1-h)\ell(x+h)\le\ell(x)$
   g. Déduire des questions précédentes que :
      - si $h>0$ alors $\ell(x)\le\dfrac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h}\le\dfrac{\ell(x)}{1-h}$
      - si $h<0$ alors $\dfrac{\ell(x)}{1-h}\le\dfrac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h}\le\ell(x)$
   h. Déduire des questions précédentes que $\ell'(x)=\ell(x)$

Rappels :

<u>Inégalités de Bernoulli</u>

$\forall x>1$, $\forall n\in\mathbb{N}$:
$(1+x)^n\ge 1+nx$

$\forall x<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$:
$(1-x)^n\ge 1-nx$

Théorème admis

<u>Suites adjacentes</u>

Soient deux suites u et v telles que u soit croissante, v soit décroissante et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n-v_n=0$ alors u et v sont convergentes et elles ont la même limite.