Probabilités conditionnelles

I. Introduction, définition et propriétés

1. Définition et propriétés

Définition :

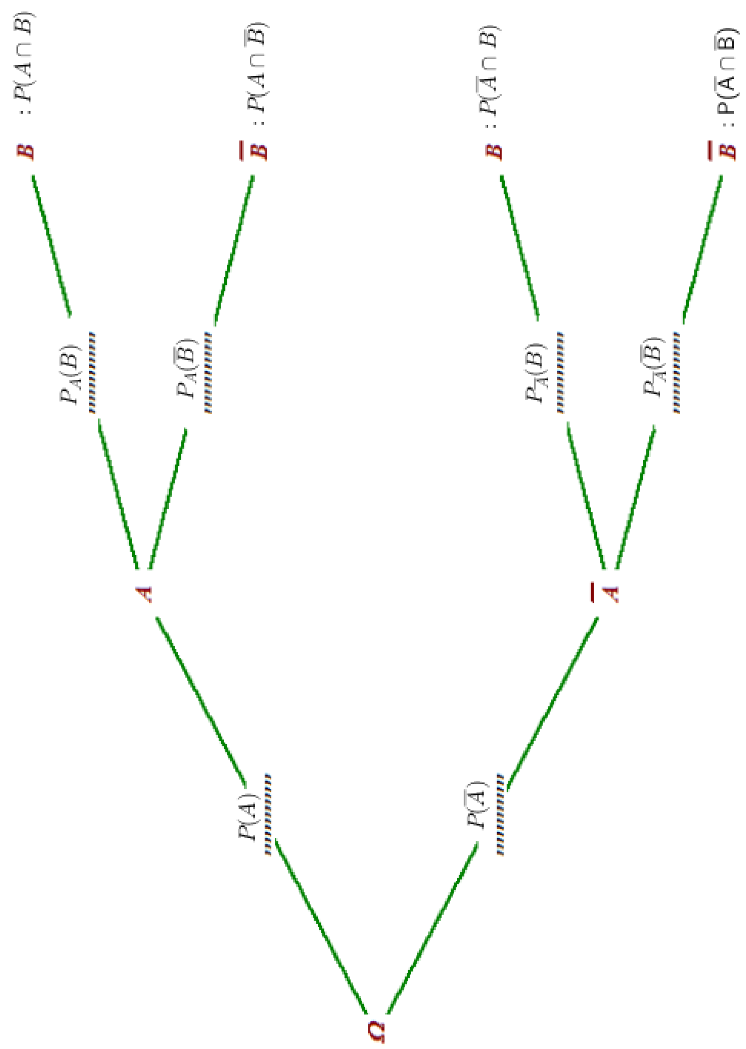
p est une probabilité sur un univers Ω. A est un événement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel :

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriétés :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- $P_A(A) = 1$
- $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A\left(B\right)$
- Si A et B sont incompatibles $A \cap B = \varnothing$ alors $P_A(B) = P_B(A) = 0$

2. Utilisation d'un arbre pondéré :

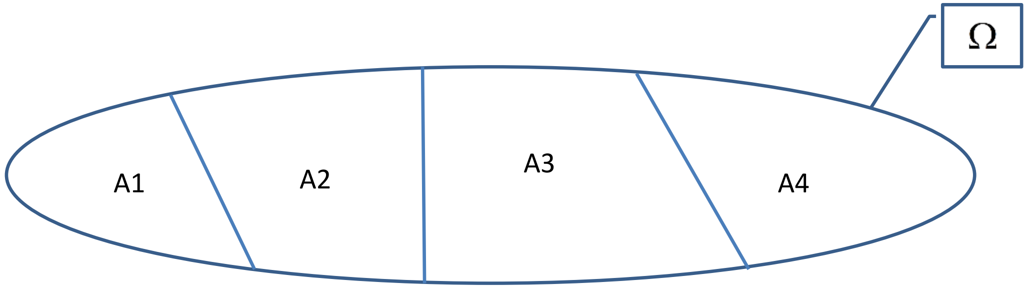


II. Formule de probabilités totales

Définition (Partition de l'univers) :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements de probabilité non nulle de l'univers. On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω ou un système complet d'événements de Ω si les B_i sont deux à deux disjoints (intersection vide) et si

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

Théorème des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements de Ω et si B est un événement de Ω alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

et

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \ldots P_{A_n}(B)P(A_n)$$

III. Indépendances d'événements

Définition : On dit que deux événements **A et B sont indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème : A et B indépendants et $P(A) \neq 0 \iff P_A(B) = P(B)$

Propriété : Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi