

Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 05
Probabilités Conditionnelles

Année :

2014-2015

**Jakob Bernoulli**

(27 Décembre 1654-16 Août 1705)

Citation du moment :

« L'incertitude n'est pas dans les choses mais dans notre tête : l'incertitude est une méconnaissance » (Jakob Bernoulli)

I. Introduction, définition et propriétés**1. Activité d'introduction**

Dans les classes de terminale S du lycée Stendhal, la répartition des 2nde langues se fait de la façon suivante :

	Esp : E	All : A	Ital : I	Total
Filles : F	17	6	7	
Garçons : G	22	12	5	
Total				

a. Compléter le tableau ci-dessus

b. Si on choisit au hasard un des élèves de terminale S, quel sont les probabilités :

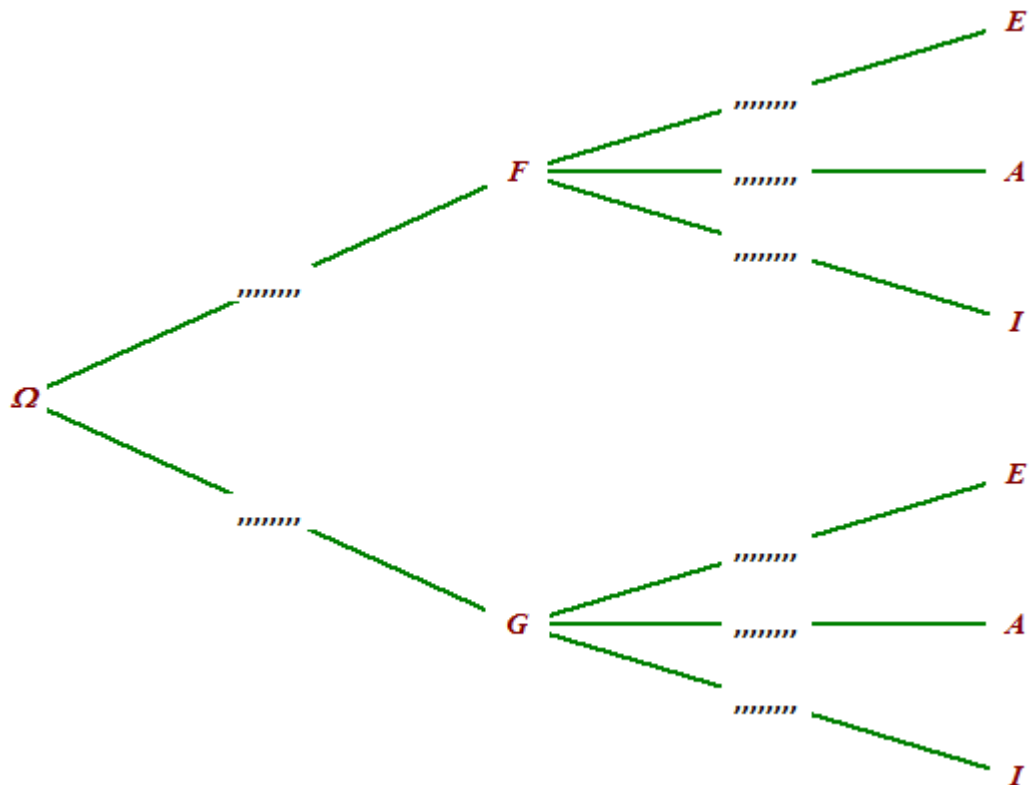
$$P(F) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad P(G) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad P(E) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$P(A) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad P(I) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad P(F \cap E) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$P(F \cap A) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad P(F \cap I) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

c. Déterminer $\frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\frac{P(F \cap I)}{P(F)} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

- d. Déterminer la probabilité que l'élève fasse espagnol sachant que c'est une fille.
On notera cette probabilité $P(E|F)$ ou $P_F(E)$:
- e. Déterminer la probabilité que l'élève fasse allemand sachant que c'est une fille.
On notera cette probabilité $P(A|F)$ ou $P_F(A)$:
- f. Déterminer la probabilité que l'élève fasse italien sachant que c'est une fille.
On notera cette probabilité $P(I|F)$ ou $P_F(I)$:
- g. Comparer $P(F)$ et $P(F \cap E) + P(F \cap A) + P(F \cap I)$
- h. Compléter l'arbre ci-dessous :



2. Définition et propriétés

Définition :

p est une probabilité sur un univers Ω . A est un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B , on appelle probabilité de B sachant A le réel :

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercices : 17 à 21 page 340

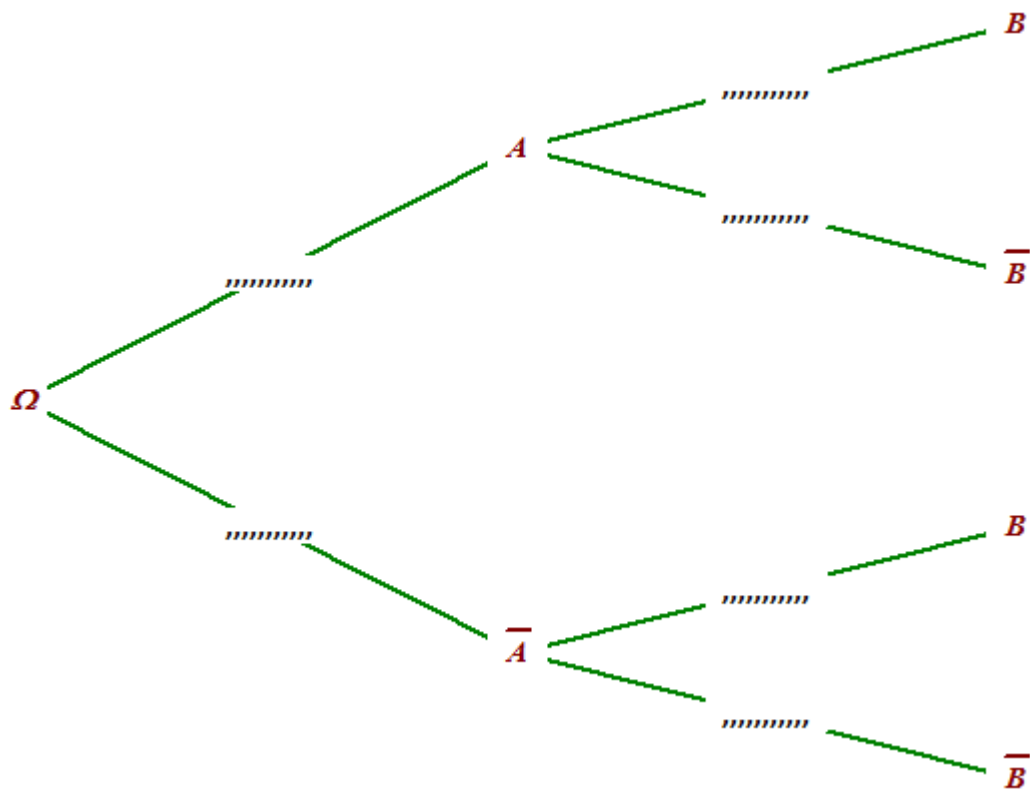
Propriétés :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- $P_A(A) = 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- Si A et B sont incompatibles $A \cap B = \emptyset$ alors $P_A(B) = P_B(A) = 0$

Démonstration :

Exercice : Si $P(A) \neq 0$, démontrer que $P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$ (Théorème de Bayes)

3. Utilisation d'un arbre pondéré :



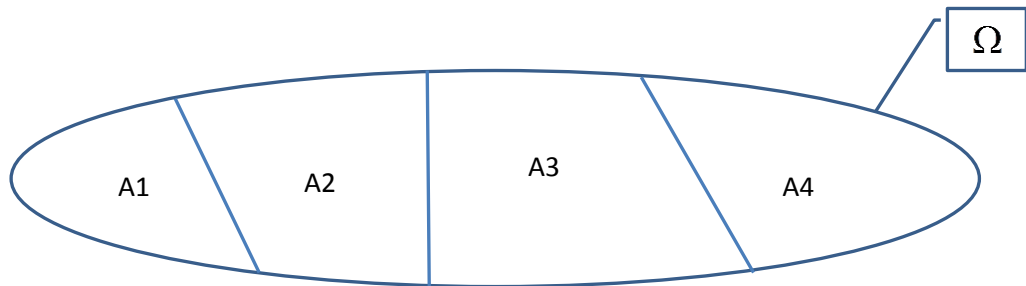
Exercices 28 (Faire un arbre) Exercice 29 et Exercice 30 page 341

II. Formule de probabilités totales

Définition (Partition de l'univers) :

A_1, A_2, \dots, A_n sont n événements de probabilité non nulle de l'univers. On dit que A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω ou un système complet d'événements de Ω si les B_i sont deux à deux disjoints (intersection vide) et si

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

Théorème des probabilités totales :

Si A_1, A_2, \dots, A_n est un système complet d'événements de Ω et si B est un événement de Ω alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

et

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

Démonstration :

Exercices : 33-37-39-40-42 page 342 et 343 Exercice 80 page 353

III. Indépendances d'événements

Définition :

On dit que deux événements **A** et **B** sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Théorème : A et B indépendants et $P(A) \neq 0 \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

Propriété : Si A et B sont indépendants alors A et \bar{B} le sont aussi

Démonstration (exigible au BAC)

B et \bar{B} forment un système complet d'événements de Ω donc d'après la formule de probabilité total : $P(A) =$

Donc $P(A \cap \bar{B}) =$

Or A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) =$

Donc $P(A \cap \bar{B}) =$