TSCH05F01 : Probabilités conditionnelles et suites

Exercice 01
Un élève possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel i l a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.
Il constate que :

- Si pendant le mois noté *n* il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il dépasse son forfait le mois suivant est de 0,2
- Si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il dépasse le forfait le mois suivant est 0,4

Pour *n* entier strictement positif, on désigne par :

- A_n l'événement : « L'élève a dépassé son forfait le mois n »

On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = P(\overline{A_n})$. On a $p_1 = 0,5$

1. Relation entre p_{n+1} *et* p_n
   a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que $\overline{A_n}$ est réalisé.
   b. Montrer que pour tout entier positif *n* non nul, les égalités suivantes sont vraies :
   $p(A_{n+1} \cap A_n) = 0,2p_n$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = 0,4(1-p_n)$. En déduire que $p_{n+1} = 0,4 - 0,2p_n$
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{3}$. Montrer que la suite *u* est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Ecrire u_n puis p_n en fonction de *n* et déterminer la limite de p_n.

Exercice 02
Dans un pays imaginaire, on admet qu'un jour donné soit il fait beau soit il pleut. S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec une probabilité égale à 0,5. S'il pleut un jour, alors il pleuvra encore le lendemain avec un probabilité de 2/3. Aujourd'hui il pleut ☹
On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, 3jours, …, dans *n* jours.

1. Pour $n \geq 1$, on désigne par B_n l'événement « Il fait beau dans n jours »
   a. Illustrer par un arbre pondéré l'évolution possible de la météo pour demain et après demain. Donner $P(B_1)$ puis calculer $P(B_2)$
   b. Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $P_{B_n}(B_{n+1})$ et calculer $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$
   Exprimer $P(B_{n+1} \cap B_n)$ et $P(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$ en fonction de $P(B_n)$
   Prouver que, pour tout $n \geq 1$, $P(B_{n+1}) = \frac{1}{6}P(B_n) + \frac{1}{3}$
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = P(B_n) - \frac{2}{5}$. Prouver que *u* est géométrique, puis exprimer u_n puis $P(B_n)$ en fonction de *n*. En déduire la limite de $P(B_n)$ et interpréter le résultat.

RAPPELS

Suites géométrique

Pour montrer qu'une suite est géométrique on montre que pour tout *n* où u est définie on a :

$u_{n+1} = q \times u_n$ avec *q* une constante.

Dans ce cas :

$u_n = u_p \times q^{n-p}$

Probabilités conditionnelles

Si $P(A) \neq 0$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si $A, \overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$