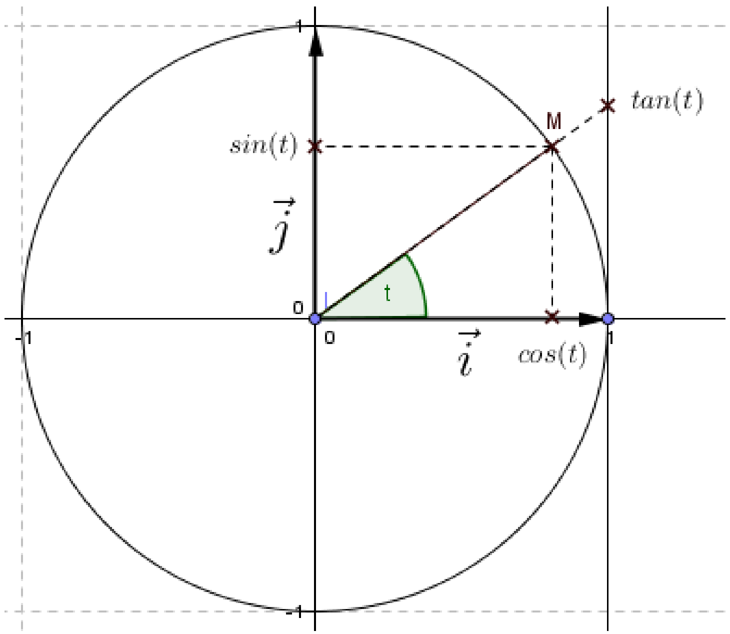
Dérivabilité et fonctions trigonométriques

I. Fonctions trigonométriques (Sinus et Cosinus)

1. Rappels et Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout réel t, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point M a pour coordonnées : $M(\cos(t); \sin(t))$



Définition 01 :

- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\cos(t)$, est appelée la fonction cosinus / $\cos : t \mapsto \cos(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\sin(t)$, est appelée la fonction sinus / $\sin : t \mapsto \sin(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\tan(t)$, est appelée la fonction tangente / $\tan : t \mapsto \tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Remarque : La fonction tangente n'est pas au programme de terminale mais il est intéressant de la connaître et de savoir ce que cela représente sur le cercle trigonométrique.

2. Propriétés et interprétations graphiques

Définition 02 :

La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(-t) = \cos(t)$$

Définition 03 :

La fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(-t) = -\sin(t)$$

Définition 04 :

Les fonctions cosinus et sinus sont <u>périodiques</u>
de période 2π sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t+2\pi)=\cos(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t+2\pi)=\sin(t)$$

3. Dérivation.

Théorème 01 :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x}=1$$

Théorème 02 :

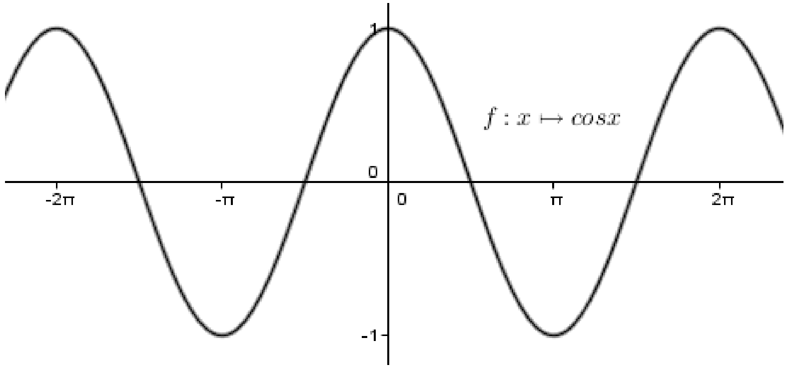
$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos x-1}{x}=0$$

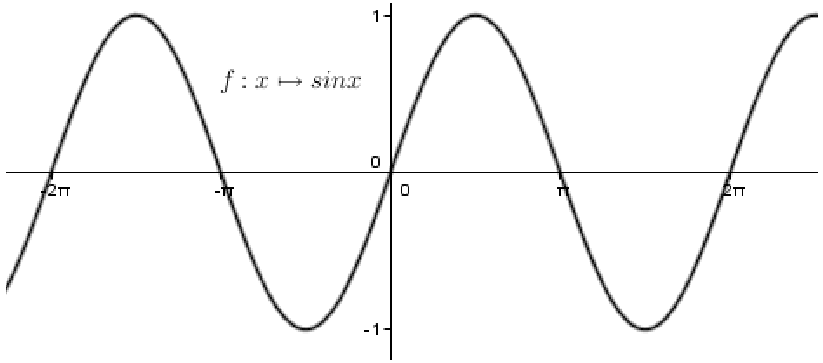
Théorème 03 :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos'(x)=-\sin(x)$$
$$\sin'(x)=\cos(x)$$

Représentation graphique des deux fonctions





II. Compléments sur la dérivation.

1. Rappels

f est définie sur un intervalle I et $a \in I$

- f est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, est unique et est finie. Dans ce cas on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a et

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, on note f' la fonction qui à x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ donc $f':x\mapsto f'(x)$
- Géométriquement, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(a; f(a))$

2. Calculs de dérivées

a. $g:x\mapsto f(ax+b)$

Théorème :

Soit a et b deux réels et f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout x tel que $ax+b\in I$, la fonction $g:x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable en x et

$$g'(x)=a\times f'(ax+b)$$

b. $g:x\mapsto\sqrt{f(x)}$

Théorème :

Si f est une fonction définie et dérivable sur I, strictement positive sur I, alors la fonction $g:x\mapsto\sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$,

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

c. $g:x\mapsto\left(f(x)\right)^n=f^n(x)$ où $n\in\mathbb{Z}^*$

Théorème : $n\in\mathbb{Z}^*$

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I dans le cas où $n<0$, alors la fonction $g:x\mapsto\left(u(x)\right)^n=u^n(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$,

$$g'(x)=n\times u'(x)\times u^{n-1}(x)$$

d. $g : x \mapsto \left(f \circ u\right)(x) = f(u(x))$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I et f dérivable sur u(I), alors la fonction $g : x \mapsto f \circ u(x) = f(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$