Continuité et limites

I. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie

Définition 01

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Définition 02

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$

Définition 03

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand dans les négatifs.

On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Définition 04

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$

Limites des fonctions usuelles

Théorème 01 :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

2. Limite infinie

Définition 05

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Définition 06

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Remarques : On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Limites des fonctions usuelles

Théorème 02 :

$\lim_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$ $\quad \lim_{x \mapsto +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \mapsto +\infty} x^k = +\infty$

$\lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$ $\quad \lim_{x \mapsto -\infty} x^2 = +\infty$

$$k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x \mapsto -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

II. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 07 (à droite)

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$. On dit que f admet pour limite à droite en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant supérieur à a.

On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Remarque : On peut faire une définition équivalente à gauche et si la limite est $-\infty$

Définition 08

Si $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ on dit alors que f admet une limite en a

Définition 09

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite ou à gauche) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Limites des fonctions usuelles

Théorème 03 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

III. Opérations sur les limites

1. Opérations algébriques

On a les mêmes résultats que pour les suites.

a. Somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	$\ell\neq 0$	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim fg$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI

c. Quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell'\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI	FI

2. Composition

Notation : Si f est définie sur I et g sur $f(I)$ alors on peut définir la fonction composée de g par f :

$h(x) = g\circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

Théorème 04 :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

IV. Cas des fonctions polynômes et rationnelles

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction rationnelle se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré.

V. Limites et comparaison

Les théorèmes sont analogues à ceux des suites.

Théorème de comparaison :

f et g sont deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que pour tout $x \in]a;+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Même chose si f et g sont définies sur $]-\infty;a[$ et la limite en $-\infty$

Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)

f, g et h sont trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que pour tout $x \in]a;+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

VI. Continuité

Définition 10

- f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

  f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur I si elle est continue en tout $a \in I$

Théorème 05

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention : La réciproque est fausse : Exemple $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

Théorème 06 :

Toute fonction construite par somme, produit, composée des fonctions usuelles est continue sur tout intervalle où elle est définie.

VII. Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

On note k un nombre de l'intervalle $f([a;b])$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ ayant pour minimum n et maximum M sur $[a;b]$. Pour tout $k \in [n;M]$, il existe au moins un réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha)=k$.

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $k \in f(I)$, il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha)=k$.