Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 03 : Les fonctions, limites, continuité et dérivabilité.

Année :

2014-2015

Gottfried Wilhelm, baron de **Leibniz,** un des fondateurs du calcul infinitésimal.

Citation du moment :

«Il y a une limite à toute chose, et il faut toujours la dépasser.» (Georges Guynemer)

I. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie

Définition 01

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Interprétation graphique

Définition 02

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$

Définition 03

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour limite ℓ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand dans les négatifs.

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

Interprétation graphique

Définition 04

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$

Limites des fonctions usuelles

Théorème 01 :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x^k} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{1}{x^k} = \ldots\ldots$

Autres exemples :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2x^2-3x+5}{7-3x^2}$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

2. Limite infinie

Définition 05

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Interprétation graphique

Définition 06

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$. On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Remarques : On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Interprétation graphique

Limites des fonctions usuelles

Théorème 02 :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2 = \ldots\ldots$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^k = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 = \ldots\ldots$

$$k \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{x \mapsto -\infty} x^k = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Exemples :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{7 - 3x^2}$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} x - \sqrt{x}$$

II. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 07 (à droite)

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$. On dit que f admet pour limite à droite en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant supérieur à a.

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique

Remarque : On peut faire une définition équivalente à gauche et si la limite est $-\infty$

Définition 08

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ on dit alors que f admet une limite en a

Définition 09

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite ou à gauche) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Interprétation graphique

Limites des fonctions usuelles

Théorème 03 :

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ <}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ <}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

Exemples :

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 5\\ >}} \frac{2x^2-3}{3x-15}$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 5\\ <}} \frac{2x^2-3}{3x-15}$

III. Opérations sur les limites

1. Opérations algébriques

On a les mêmes résultats que pour les suites.

a. Somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	……..	……..	……..	……..	……..	……..

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x$

b. Produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim fg$	……..	…….. ……..	…….. ……..	…….. ……..	……..

Exemples :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^3(1-\sqrt{-x})$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(4-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right)$

c. Quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f}{g}$	……..	……..	……..	……..	……..	……..

Exemples :

$\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

2. Composition

Notation : Si f est définie sur I et g sur $f(I)$ alors on peut définir la fonction composée de g par f : $h(x) = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$

Exemple 01 : $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f : x \mapsto 3x^2 + 2$

f est définie sur $\mathbb{R}$, $f\left(\mathbb{R}\right) = [2;+\infty[$ et g est définie sur $[2;+\infty[$ donc

$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème 04 :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

Exercices 57-63 b) c) puis 64 page 74

IV. Cas des fonctions polynômes et rationnelles

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

Démonstration : On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

Exemple : $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

Proposition :

En $\pm\infty$ une fonction rationnelle se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré.

Démonstration : On pose $f : x \mapsto \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 3}{2x - 1}$

V. Limites et comparaison

Les théorèmes sont analogues à ceux des suites.

Théorème de comparaison :

f et g sont deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que

pour tout $x \in]a;+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Même chose si f et g sont définies sur $]-\infty;a[$ et la limite en $-\infty$

Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)

f, g et h sont trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que

pour tout $x \in]a;+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Exercices 68-67 page 75 + 120

VI. Continuité

Introduction

$f(-1) =$

$f(1) =$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) =$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) =$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) =$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) =$

On dira donc que f est continue sur et mais f n'est pas continue en

Définition 10

- f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
  f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur I si elle est continue en tout $a \in I$

Théorème 05

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention : La réciproque est fausse : Exemple $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

Théorème 06 :

Toute fonction construite par somme, produit, composée des fonctions usuelles est continue sur tout intervalle où elle est définie.

VII. Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

On note k un nombre de l'intervalle $f\left([a;b]\right)$

- L'équation $f(x) = k$ a-t-elle forcément au moins une solution ?

- Quelle(s) condition faut-il sur f pour qu'il ait une seule solution ?

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ ayant pour minimum n et maximum M sur $[a;b]$. Pour tout $k\in[n;M]$, il existe au moins un réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha)=k$.

Tableau des variations :

Représentation graphique :

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $k\in f(I)$, il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha)=k$.

Tableau des variations :

Représentation graphique :

Exercices

- 86-88-89-91-92-95
- 100 (fonction auxiliaire et positions
- 106 logiciels de calcul formel
- 107-108 Etude de fonction rationnelle et positions.

VIII. Algorithme de recherche d'une solution, par dichotomie

f est une suite fonction continue et strictement monotone définie sur $[a;b]$.

Ecrire un algorithme qui détermine une valeur approchée à 10^{-n} de la solution de l'équation $f(x)=k$ où k est un nombre appartenant à $f([a;b])$.

<u>Exemple</u> : $f: x \mapsto x^2-4x+1$ sur $[2;4]$

Algorithme

Variables

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ **et** $n \in \mathbb{N}$

Début de l'algorithme

Initialisation

Saisir n

Traitement

Tant que $b-a \geq 10^{-n}$

$\frac{a+b}{2} \to m$

Si $f(a)\times f(m) \leq 0$ alors

$m \to b$

Sinon $m \to a$

Fin du Si

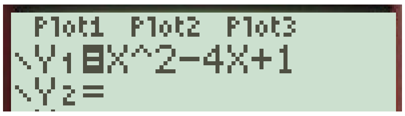
Fin du Tant que

Afficher a et b

Fin de l'algorithme

Programme Ti82 (exemple)

1. Entrer la fonction dans la calculatrice.



2. Programmation

Program EQFCT
:Input "A= ",A
:Input "B= ",B
:Input "N= ",N
:While B-A $\geq$ 10^(-N)
:(A+B)/2 $\to$ M
:If $Y_1(A)\times Y_1(M) \leq 0$
:Then
:M $\to$ B
:Else
:M $\to$ A
:END
:END
:Disp A,B

3. Résultat de l'exemple pour N=3