Les complexes (Partie I)

a. Définition, notations et applications

Définition :

On nomme $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, défini par

$$\mathbb{C}=\left\{a+ib \quad ,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},i^2=-1\right\}$$

Remarques :

- $\mathbb{C}$ contient tous les nombres réels donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
- i est un nombre et n'est pas une variable. $i^2=-1$

Application : Si $a\in\mathbb{R}^+$ alors $-a=\left(i\sqrt{a}\right)^2$

Notation et vocabulaire :

On note souvent les nombres complexes z. Il existe donc deux réels unique tels que

$$z=a+ib$$

- $z=a+ib$ se nomme « **l'écriture algébrique** de z »
- a se nomme « **la partie réelle de** z » et se note $a=\mathrm{Re}(z)$
- b se nomme « **la partie imaginaire de** z » et se note $b=\mathrm{Im}(z)$
- Si $b=0$ alors $z=a$ donc z est un « **nombre réel** ».
- Si $a=0$ alors $z=ib$ et on dit que z est un « **imaginaire pur** »
- 0 est à la fois un nombre réel et un imaginaire pur.
- On note $\bar{z}=a-ib$ est « **le nombre complexe conjugué de** z »

I. Stabilité de l'ensemble des nombres complexes

a, b, a', c' sont des nombres réels.

On note $z_1=a+ib$ et $z_2=a'+ib'$ deux nombres complexes.

Le but est de savoir si en ajoutant, soustrayant, multipliant et divisant deux nombres complexes, on obtient toujours un nombre complexe ?

1. $\mathbb{C}$ est-il stable par addition ?

$$Z=z_1+z_2=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$

2. $\mathbb{C}$ est-il stable par soustraction ?

$$Z=z_1+z_2=(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$$

3. $\mathbb{C}$ est-il stable par multiplication ?

$$Z=z_1\times z_2=(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

4. $\mathbb{C}^*$ est-il stable par passage à l'inverse ?

$$Z=\frac{1}{z_1}=\frac{1}{(a+ib)}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

5. $\mathbb{C}^*$ est-il stable par division ?

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}-i\frac{ab'+ba'}{a'^2+b'^2}$$

II. Propriétés

On note z et z' deux nombres complexes.

Propriété 01 : $z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=0 \\ \mathrm{Im}(z)=0 \end{cases}$

Propriété 02 : $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$

Propriété 03 : (Nombre complexe conjugué)

i. $\overline{\overline{z}}=z$

ii. $z=z' \Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'}$

iii. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

iv. $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

v. $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

vi. $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

vii. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

viii. Si $z=a+ib$ alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$

ix. Si $z\neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

x. Si $n\in\mathbb{Z}$ alors $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$

III. Equation du second degré $az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\ et\ c\in\mathbb{R}$

Théorème :

- Si $\Delta>0$ alors

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$$ et

il y a donc deux racines (solutions de l'équation) réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$ alors $az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$ et il y a donc une seule racine réel :

$$x_1=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$ alors $\Delta=i^2|\Delta|$ alors

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)=a(z-z_1)(z-z_2)$$

et il y a donc deux racines (solutions de l'équation) complexes distinctes :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

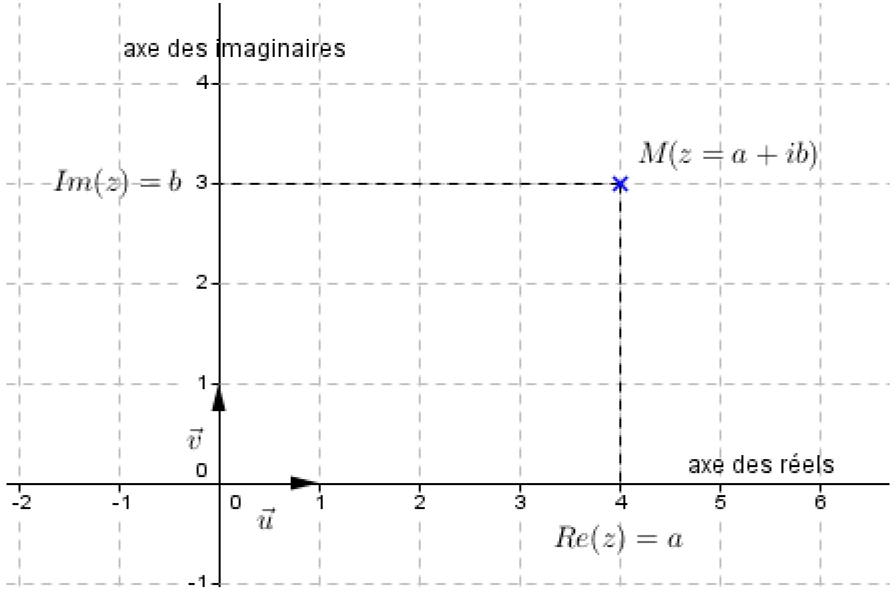
(Remarque : $\overline{z_1}=z_2$)

IV. Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut lui faire correspondre un point dans la plan, le point M de coordonnées $(a;b)$. Pour chaque nombre complexe dans $\mathbb{C}$, il existe un unique point $M(a;b)$ dans le plan et pour chaque point $M(a;b)$ dans le plan, il existe un unique nombre complexe $z=a+ib$.
On dira alors que $z=a+ib$ est **l'affixe** du point $M(a;b)$

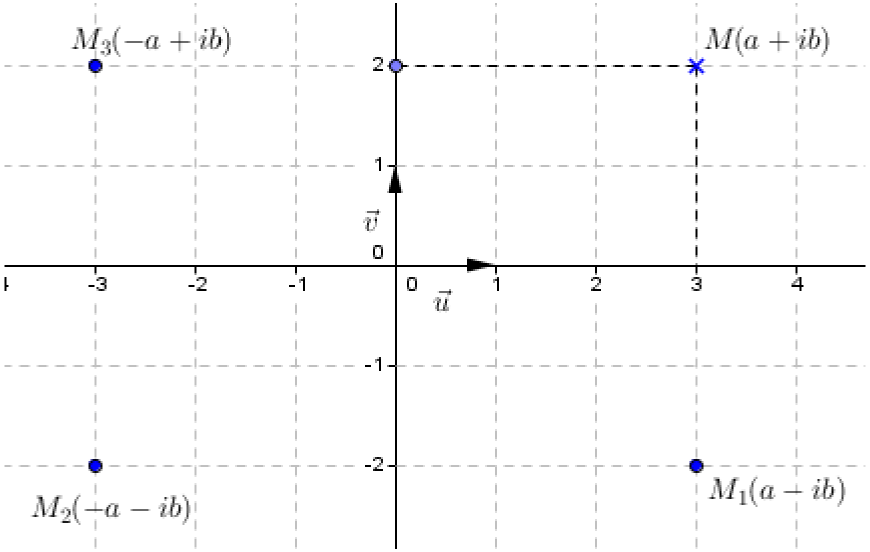
Remarques :

- Si z est réel alors M(z) est sur l'axe des abscisses et donc on nommera cet axe l'axe des réels.
- Si z est imaginaire pur alors M(z) est sur l'axe des ordonnées et donc on nommera cet axe l'axe des imaginaires purs.



Remarques :

- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- Les points d'affixes z et $-\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires.



Affixe d'un vecteur :

$\overrightarrow{OM}$ et M ayant les mêmes coordonnées, on dit aussi que z, affixe de M, est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

Propositions :

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de I milieu de [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- Si $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w}'(z')$ alors
  i. $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}' \Leftrightarrow z = z'$
  ii. $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'$ a pour affixe $z + z'$
  iii. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\overrightarrow{w}$ a pour affixe λz