Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 02 : Les Complexes (Partie I)

Année :

2014-2015

Girolamo Cardano
Cardan

Niccolo Fontana
Tartaglia

Citation du moment :

« Tout ce qui peut être imaginé est réel» (Pablo Picasso)

I. Histoire, définition et notations

a. Histoire (Extrait de l'encyclopédie Universalis)

Alors que de nombreux mathématiciens (dont Viète) hésitaient encore à utiliser les nombres négatifs, les algébristes italiens du xvi[e] siècle, **Cardan** et ses élèves, s'enhardirent à introduire dans les calculs des symboles purement formels $\sqrt{-a}, a > 0$, représentant le résultat de l'extraction « impossible » de la racine carrée du nombre négatif $-a$; ils décrivent en détail des règles de calcul permettant de manipuler ces nouveaux « nombres », appelés par eux « *nombres impossibles* » ou « **les *nombres complexes*** ».

À l'origine, il s'agissait seulement de donner des racines à *toutes* les équations du second degré ; les résultats obtenus dans l'étude de l'équation du troisième degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Au moyen de la formule dite de Cardan, Bombelli montre, en 1572, que la racine $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$ peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 4,$$

mettant par là en évidence le fait que certaines quantités réelles peuvent être représentées par des expressions en apparence imaginaires. Ainsi, la formule de Cardan permet de représenter des racines réelles par l'intermédiaire d'opérations effectuées sur des nombres impossibles, ou « imaginaires ». Les nombres imaginaires fournissent donc des méthodes de calcul, de nature certes mystérieuse, mais qui permettent d'obtenir des résultats « vrais » qu'il serait souvent beaucoup plus long ou beaucoup plus difficile d'obtenir directement.

Pour ces raisons, somme toute empiriques, les mathématiciens utilisèrent avec une confiance croissante les nombres imaginaires depuis le début du xvii[e] siècle

b. Définition, notations et applications

Définition :

On nomme $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, défini par

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \quad , a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

Remarques :

- $\mathbb{C}$ contient tous les nombres réels donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- i est un nombre et n'est pas une variable. $i^2 = -1$

Application :

Si $a \in \mathbb{R}^+$ alors $-a = \left(i\sqrt{a}\right)^2$

Exemple : $-4 =$.................. $-7 =$..................

Notation et vocabulaire :

On note souvent les nombres complexes z . Il existe donc deux réels unique tels que

$$z = a + ib$$

- $z = a + ib$ se nomme « **l'écriture algébrique** de z »
- a se nomme « **la partie réelle de** z » et se note $a = \mathrm{Re}(z)$
- b se nomme « **la partie imaginaire de** z » et se note $b = \mathrm{Im}(z)$
- Si $b = 0$ alors $z = a$ donc z est un « **nombre réel** ».
- Si $a = 0$ alors $z = ib$ et on dit que z est un « **imaginaire pur** »
- 0 est à la fois un nombre réel et un imaginaire pur.
- On note $\bar{z} = a - ib$ et on le nomme « **le nombre complexe conjugué de** z »

Exemple : $z = 3 - 2i$ (nombre complexe)

$\mathrm{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple : $z = 3i$ (nombre imaginaire pur)

$\mathrm{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple : $z = -4$ (nombre réel)

$\mathrm{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

II. Stabilité de l'ensemble des nombres complexes

a, b, a', c' sont des nombres réels.

On note $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ deux nombres complexes. Le but est de savoir si en ajoutant, soustrayant, multipliant et divisant deux nombres complexes, on obtient toujours un nombre complexe ?

1. $\mathbb{C}$ est-il stable par addition ?

$Z = z_1 + z_2 = (a + ib) + (a' + ib')$

$=$

Donc

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -1 + i$

2. $\mathbb{C}$ est-il stable par soustraction ?

$Z = z_1 - z_2 = (a + ib) - (a' + ib')$

$=$

Donc

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -1 + i$

3. $\mathbb{C}$ est-il stable par multiplication ?

$Z = z_1 \times z_2 = (a+ib)\times(a'+ib')$

$=$

Donc

Exemple : $z_1 = 3-2i$ et $z_2 = -1+i$

4. $\mathbb{C}$ est-il stable par passage à l'inverse ?

Supposons que $z_1 \neq 0$

$Z = \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{a+ib}$

$=$

Donc

Exemple : $z_1 = 3-2i$

5. $\mathbb{C}$ est-il stable par division ?

Supposons que $z_2 \neq 0$

$Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{a'+ib'} = (a+ib)\times\dfrac{1}{a'+ib'}$

$=$

Donc

Exemple : $z_1 = 3-2i$ et $z_2 = -1+i$

III. Propriétés

On note z et z' deux nombres complexes.

Propriété 01 : $z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=0 \\ \mathrm{Im}(z)=0 \end{cases}$

Démonstration :

Propriété 02 : $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$

Démonstration :

Propriété 03 : (Nombre complexe conjugué)

i. $\overline{\overline{z}}=z$

ii. $z=z' \Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'}$

iii. $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$

iv. $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

v. $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

vi. $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

vii. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

viii. Si $z=a+ib$ alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$

ix. Si $z\neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

x. Si $n\in\mathbb{Z}$ alors $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$

Démonstration :

IV. **Equation du second degré** $az^2+bz+c=0$ **avec** $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\ et\ c\in\mathbb{R}$

Rappel de première S :

$$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Si on note $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ (**le discriminant** de l'équation) on obtient alors :

$$\boxed{az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}$$

Théorème :

- Si $\Delta>0$ alors $az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$ et il y a donc deux racines (solutions de l'équation) réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$ alors $az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$ et il y a donc une seule racine réel :

$$x_1=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$ alors $\Delta=i^2|\Delta|$ alors

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z-\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)=a(z-z_1)(z-z_2)$$

et il y a donc deux racines (solutions de l'équation) complexes distinctes :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{(Remarque : } \overline{z_1}=z_2\text{)}$$

Démonstration du troisième point :

Exemples :

1. On souhaite résoudre l'équation $z^2+2z+6=0$

V. **Représentation géométrique d'un nombre complexe.**

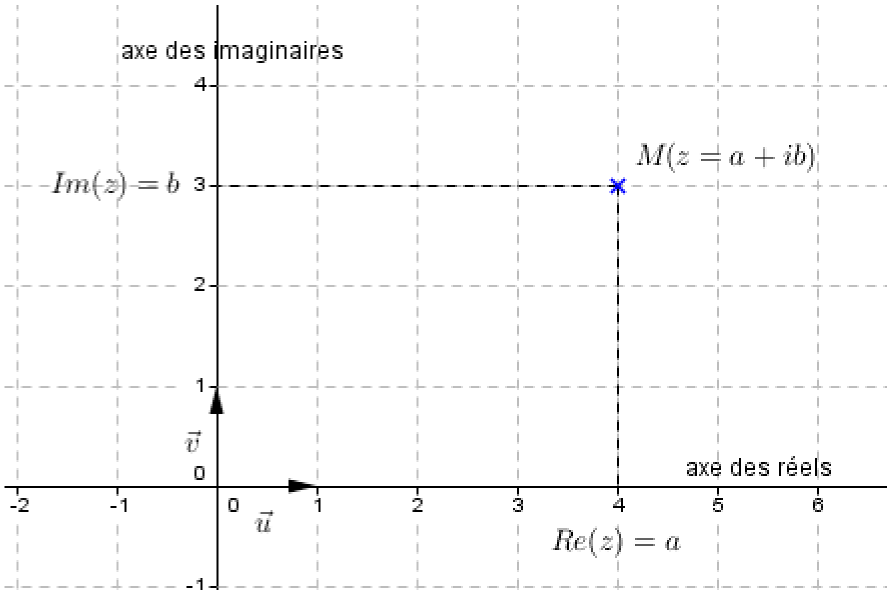
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut lui faire correspondre un point dans la plan, le point M de coordonnées $(a;b)$. Pour chaque nombre complexe dans $\mathbb{C}$, il existe un unique point $M(a;b)$ dans le plan et pour chaque point $M(a;b)$ dans le plan, il existe un unique nombre complexe $z=a+ib$.

On dira alors que $z=a+ib$ est **l'affixe** du point $M(a;b)$

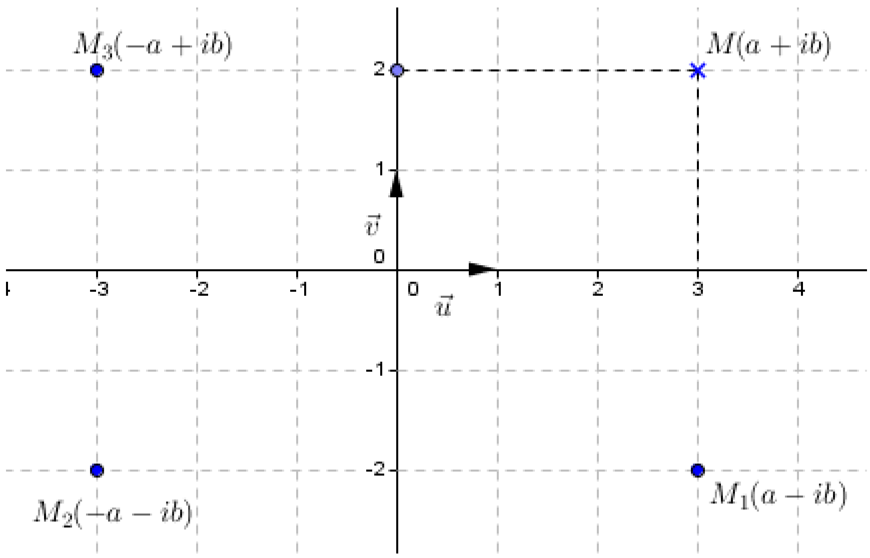
Remarques :

- Si z est réel alors M(z) est sur l'axe des abscisses et donc on nommera cet axe l'axe des réels.
- Si z est imaginaire pur alors M(z) est sur l'axe des ordonnées et donc on nommera cet axe l'axe des imaginaires purs.



Remarques :

- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- Les points d'affixes z et $-\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires.



Affixe d'un vecteur :

$\overrightarrow{OM}$ et M ayant les mêmes coordonnées, on dit aussi que z, affixe de M, est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

Propositions :

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe de I milieu de [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- Si $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w'}(z')$ alors
  i. $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'} \Leftrightarrow z = z'$
  ii. $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$
  iii. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\overrightarrow{w}$ a pour affixe λz

Démonstration :

Exercices 53 à 56