TSCH01F01 : Démonstration par récurrence

Exercice 01 :

Pour les suites ci-dessous, calculer les premiers termes puis conjecturer une formule explicite des termes u_n et enfin démontre cette formule par récurrence.

1. Pour tout entier naturel $n>0$

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

2. Pour tout entier naturel $n>0$

$$u_1 = \frac{1}{3} \text{ et } u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$$

Exercice 02 :

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 03 :

1. Montrer que les propriétés suivantes sont héréditaires
   a. $3^{4n} - 1$ est un multiple de 5
   b. $10^n + 1$ est un multiple de 9
2. Quelles sont celles qui sont vraies pour tout entier naturel n ?

Exercices de votre livre

Exercice 33 page 32
Exercice 35 page 32
Exercice 37 page 33
Exercice 38 page 33
Exercice 41 page 33

Sujet du BAC : (Antille-Guyane 2014)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels par :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n$

1. A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (arrondir à 0,01 près)
2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
(u_n)	2								

3. D'après le tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n)
4. Démontrer par récurence que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Evaluation

TSCH01F01			
AA	A	EA	NA

Vocabulaire

Démonstration par récurrence

Initialisation

On montre que la propriété est vraie pour le premier (ou les premiers) rang(s)

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie au rang n (ou tous les rangs jusqu'à n) et on démontre qu'alors elle est vraie au rang n+1

Conclusion

La propriété est vraie au(x) premier(s) rang (s) et elle se propage d'un rang au suivant alors elle est vraie pour tous les rangs.