LES SUITES

I. Variations des suites

1. Définitions

<u>Suite Croissante</u> :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n \quad (\text{ resp } u_{n+1}>u_n)$$

<u>Suite Décroissante</u> :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leq u_n \quad (\text{ resp } u_{n+1}<u_n)$$

II. Suites majorées, minorées et bornées

1. Définitions

a. Une suite (u_n) est dite **<u>majorée</u>** s'il existe un réel M tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$$

b. Une suite (u_n) est dite **<u>minorée</u>** s'il existe un réel N tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ N\leq u_n$$

c. Une suite (u_n) est dite **<u>bornée</u>** si elle est majorée et minorée. Il existe deux réels M et N tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ N\leq u_n\leq M$$

2. Remarques

a. Si (u_n) est majorée par M alors tous les nombres réels > M sont aussi des majorants de cette suite.

b. Si (u_n) est minorée par N alors tous les nombres réels < N sont aussi des minorants de cette suite.

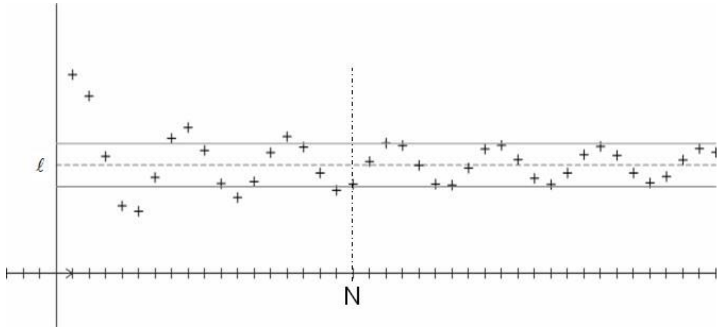
III. Limites d'une suite

1. Définitions

<u>**Définition 01**</u>

On note $\ell\in\mathbb{R}$

On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.



Proposition : Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\ell$ alors ℓ est unique.

<u>**Définition 02**</u> :

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$

contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Remarque : Certaines suites n'ont pas de limite comme par exemple (w_n)

Définition 03 :

Si (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) converge vers ℓ.

Dans tous les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que la suite diverge.

2. Limite des suites usuelles

Théorème :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

3. Opérations sur les limites

a. Somme

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI

c. Quotient

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	FI	FI

4. Limites par comparaison

Théorème :

(u_n) et (v_n) sont deux suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$$

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

5. Limite par encadrement

Théorème d'encadrement (dit : Théorème des gendarmes) :

$\ell \in \mathbb{R}$

(u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

- Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \ell$

6. Limite d'une suite monotone

Théorème :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

7. Limite d'une suite géométrique

Rappels sur les suites géométriques :

On note u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_{n+1} = u_n \times q$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}, \; q \neq 1$$

Théorème :

q est un nombre réel différent de 1.

- Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

8. Limite et variation

Théorème :

Si (u_n) est croissante et convergente alors elle est majorée par ℓ

Théorème :

Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle admet $+\infty$ comme limite.

Conclusion :

Une suite croissante est :

- Soit majorée et convergente
- Soit non majorée et de limite $+\infty$ donc diverge.