Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 01 : Les suites

Année :

2014-2015

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion» (Stendhal)

I. Définition et notations

Une suite u est une application dont l'ensemble de départ est dans l'ensemble des entiers naturels. On note n à la place de x et on note u_n à la place de $u(n)$ ou f(x).

$$u : n \mapsto u_n$$

u_n est le terme de rang n de la suite u (l'image de n par u).

u_{n+1} est le terme de rang n+1 ou le terme suivant de u_n

u_{n-1} est le terme de rang n-1 ou le terme précédent de u_n

La suite de termes u_n se note u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. **<u>Définition explicite</u>** (en fonction de n) **d'une suite.**

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$

b. **<u>Définition par récurrence</u>** (en fonction du (ou des termes) précédent(s)) **d'une suite**

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n-1} + 4$ et $u_0 = 1$

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$

II. Variations des suites

1. Définitions

Suite Croissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n \quad (\text{ resp } u_{n+1}>u_n)$$

Suite Décroissante :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leq u_n \quad (\text{ resp } u_{n+1}<u_n)$$

2. Exemples

a. Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

b. $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n^2+1}$

On montrera que les termes sont tous positifs puis on pourra étudier les variations.

III. Suites majorées, minorées et bornées

1. Définitions

a. Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$$

b. Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N \leq u_n$$

c. Une suite (u_n) est dite **bornée** si elle est majorée et minorée. Il existe deux réels M et N tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ N \leq u_n \leq M$

2. Remarques

a. Si (u_n) est majorée par M alors tous les nombres réels > M sont aussi des majorants de cette suite.

b. Si (u_n) est minorée par N alors tous les nombres réels < N sont aussi des minorants de cette suite.

3. Exemples

a. Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$. Avec un calculatrice, émettre une conjecture sur la suite (u_n). Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ et en déduire que (u_n) est bornée.

b. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 3$

c. Exercice 39 page 33

IV. Limites d'une suite

Activité :

$$u_n = \frac{2n-1}{n} \ (n \geq 1) \qquad v_n = n^2 \qquad w_n = (-1)^n$$

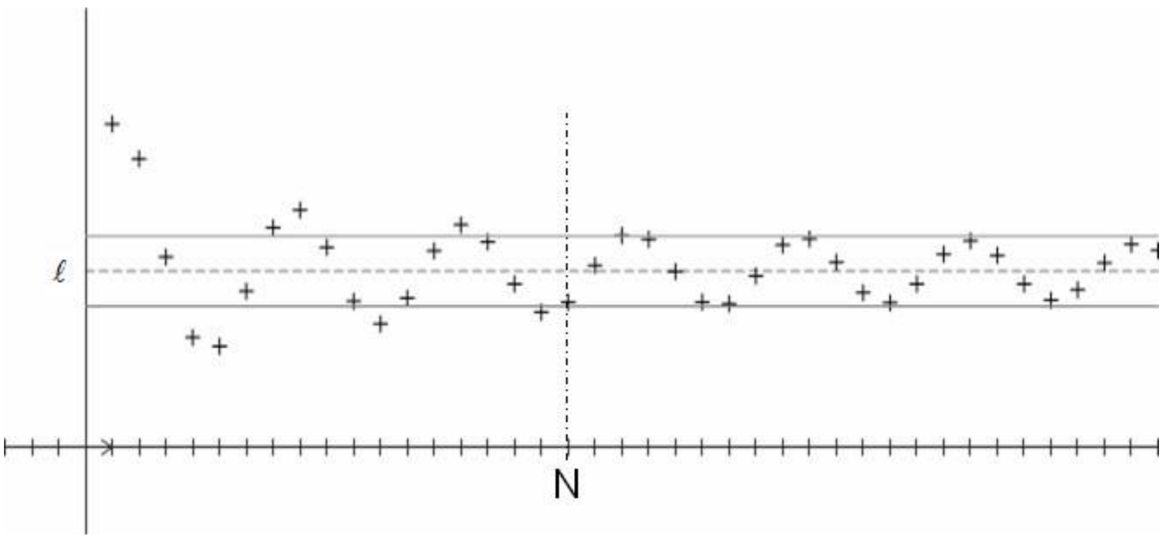
Conjecturer sur le comportement à l'infini des suites ci-dessus

1. Définitions

Définition 01

On note $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.



Exemple : $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$ $(n \geq 1)$

On note $\alpha > 0$

$I_\alpha =]2-\alpha; 2+\alpha[$ est un intervalle ouvert contenant 2.

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I_\alpha \Leftrightarrow$

Proposition : Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \ell$ alors ℓ est unique.

Définition 02 :

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Exemple : $v_n = n^2$

$n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]A; +\infty[\Leftrightarrow$

Remarque : Certaines suites n'ont pas de limite comme par exemple (w_n)

Définition 03 :

Si (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) converge vers ℓ.

Dans tous les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que la suite diverge.

Exercice 48 page 34

2. Limite des suites usuelles

Théorème :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^2 = \ldots\ldots$ Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^k = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sqrt{n} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = \ldots\ldots$ Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n^k} = \ldots\ldots$

3. Opérations sur les limites

a. Somme

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n+v_n$	……..	……..	……..	……..	……..	……..

b. Produit

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n\times v_n$	……..	…….. ……..	…….. ……..	…….. ……..	……..

c. Quotient

ℓ et ℓ' sont deux réels

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell'\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	……..	……..	……..	……..	……..	……..

Exercices

8 et 9 page 21

58-60a-61-55 page 34

4. Limites par comparaison

Théorème :

(u_n) et (v_n) sont deux suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$$

- Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration (**Exigible au BAC**) :

Exercices 70-74 page 36

5. Limite par encadrement

Théorème d'encadrement (dit : Théorème des gendarmes) :

$\ell \in \mathbb{R}$

(u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites tel que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

- Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \ell$

Démonstration : (N'est pas au programme)

6. Limite d'une suite monotone

Théorème :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Exercices : 22 page 28 et 93 page 39 + 14p25 +81ou82 page 37

7. Limite d'une suite géométrique

Rappels sur les suites géométriques :

On note u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_{n+1} = u_n \times q$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq p$: $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

Théorème :

q est un nombre réel différent de 1.

- Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ………….. et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} q^n =$………
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ………….. et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} q^n =$………
- Si $q < -1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ …………..

Démonstration (**Exigible au BAC**) :

Exercices : 92-99-100 (voir 107) page 37

8. Limite et variation

Théorème :

Si (u_n) est croissante et convergente alors elle est majorée par ℓ

Démonstration (**Exigible au BAC**) :

Théorème :

Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle admet $+\infty$ comme limite.

Démonstration : (Non exigible au BAC)

Conclusion :

Une suite croissante est :

- Soit majorée et convergente
- Soit non majorée et de limite $+\infty$ donc diverge.

9. Algorithme de seuil

(u_n) est une suite croissante telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. A est un réel donné.

Ecrire un algorithme qui détermine un rang N à partir du quel $u_n > A$

<u>Exemple</u> : $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$ et $A = 55$