Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 01 : Les suites

Démonstration par récurrence

Année :

2014-2015

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion» (Stendhal)

I. Démonstration par récurrence

Les démonstrations par récurrence servent à démontrer qu'une propriété est vraie ou fausse pour tous les entiers à partir d'un certain rang, **lorsque la démonstration directe est difficile.**

Il faut donc avoir à démontrer quelque chose du genre :

Pour tout entier naturel $n \geq p$, la propriété P_n est vraie

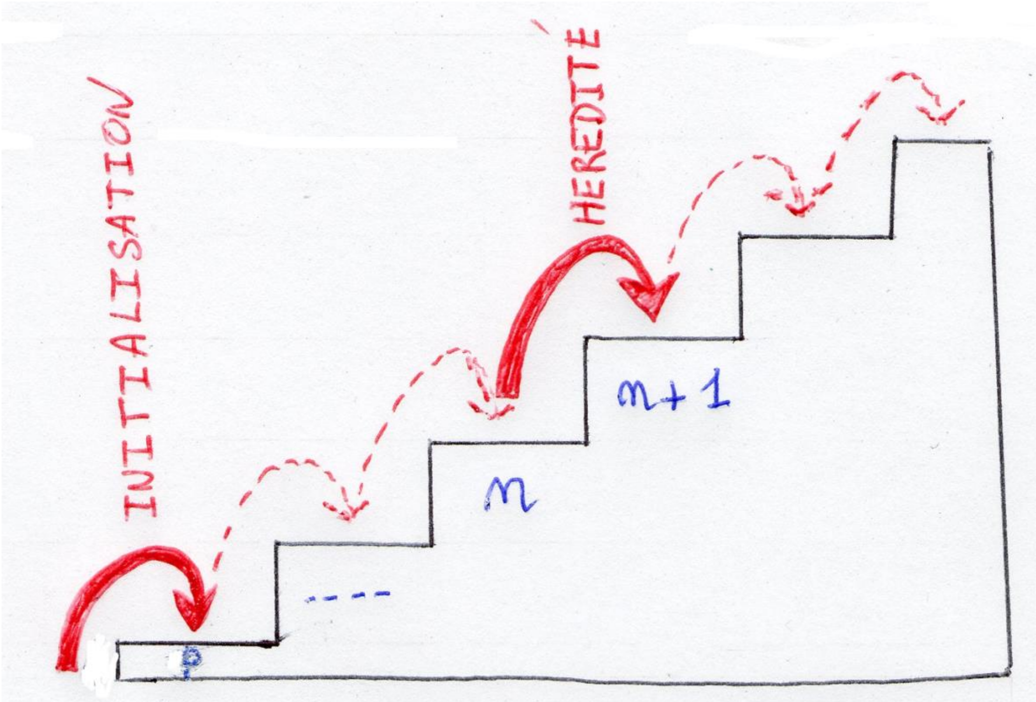
Pour faire ce genre de démonstration, on va devoir prouver les deux étapes suivantes :

a. La propriété est vraie au rang p (Initialisation)

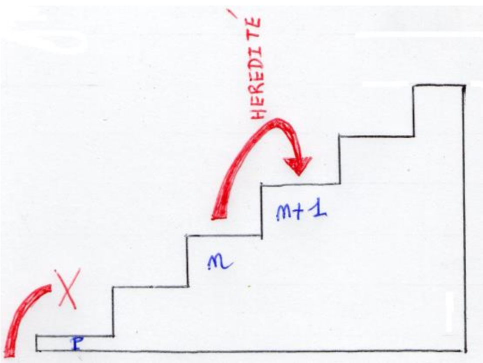
b. Pour un n tel que $p \leq n$, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi. On dit dans ce cas que (P_n) a un caractère héréditaire.

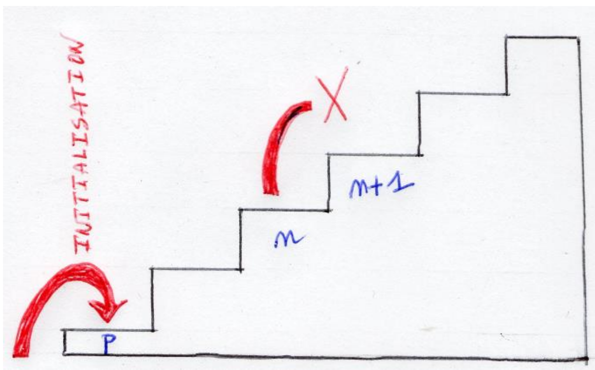
On pourra alors conclure que P_n est vraie pour tout entier $n \geq p$

Schématisation du procédé :



Attention, s'il manque une des deux étapes alors la démonstration n'est pas correcte !!





Exemples :

1. a est un réel positif

   Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$

2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n + 3$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7