TS-DS n°3-Le 17 Novembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (environ 9 points)

On note f la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\} = \boxed{]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$
   $\displaystyle\lim_{x\to-1} x^3-1 = -2$ de plus $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} (x+1)^2 = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} (x+1)^2 = 0^+$ car pour tout $x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 \geq 0$
   On a donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty}$

3. On note (D) la droite d'équation $y = x-2$
   (a) Pour tout x_f, $f(x)-(x-2) = \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2} - (x-2) = \dfrac{x^3-1-(x-2)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3-1-x^3-2x^2-x+2x^2+4x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+1}{(x+1)^2}$
   (b) Sur $]-\infty;-1[\cup\left]-1;-\dfrac{1}{3}\right[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (D) et Sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (D).
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0$. Donc $\mathscr{C}_f$ se rapproche de (D) en $\pm\infty$.

4. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition et
   $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+2x+1)-(x^3-1)(2x+2)}{(x+1)^4} = \dfrac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3+2x+2}{(x+1)^4} = \dfrac{x^4+4x^3+3x^2+2x+2}{(x+1)^4}$
   or $(x+1)(x^3+3x^2+2) = x^4+3x^3+2x+x^3+3x^2+2 = x^4+4x^3+3x^2+2x+2$ donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x^3+3x^2+2)}{(x+1)^4}$

5. On note $g : x \mapsto x^3+3x^2+2$
   (a) g est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			6				$+\infty$
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		$-\infty$			2		

   (b) $0 \notin g(]-2;+\infty[) =]2;+\infty[$ par contre g est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur $]-\infty;-2[$ et $0 \in g(]-\infty;-2[) =]-\infty;6[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intérmédiaires, $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   de plus $g(-4) = -14$ et $g(-3) = 2$ donc $-4 < \alpha < -3$
   (c) Avec une calculatrice on obtient : $-3,1959 < \alpha < -3,1958$ donc $\alpha \approx -3,196$
   (d) Tableau des signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

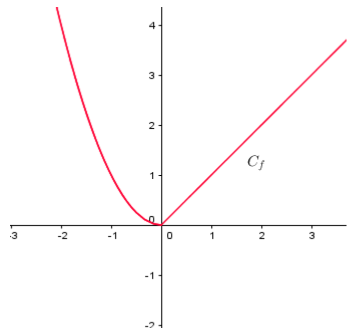
6. Déterminer le tableau des variations de f

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
			$f(\alpha)$		$\Vert$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty \Vert -\infty$		

Exercice 2 : (environ 3 points)

On note $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & si \quad x \in]-\infty;0[\\ 0 & si \quad x = 0 \\ |x| & si \quad x \in]0;+\infty[\end{cases}$

1. f est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme fonctions usuelles continues sur ces intervalles.
   De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} = 0^2 = 0$ et $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} = |0| = 0$ donc f est continue aussi en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$
2. On note $h < 0$: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h^2}{h} = h$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} h = 0$
   On note $h > 0$: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} 1 = 1$
   Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0. Par contre elle est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. La courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



Exercice 3 : (environ 4 points)

On note $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

1. $P(2) = 0$ et en développant on obteint $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$
2. $\Delta = -8 = (i2\sqrt{2})^2$, donc $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
   Donc $\boxed{S = \{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}; 2; -\sqrt{2}-i\sqrt{2}\}}$ puis $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$
3. $A(0;2)$ et $B(-\sqrt{2};\sqrt{2})$
   $OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = 4$ et $OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 2 + 2 = 4$ donc $OA = OB$ et OAB est un triangle isocèle en O.
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}(-1+i)}{\sqrt{2}(-1-i)} = \dfrac{-1+i}{-1-i} = \dfrac{(-1+i)^2}{2} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

Exercice 4 : (environ 4 points)

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto x^n + x - 1$ définie sur $[0;1]$

1. f_n est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ sur $[0;1]$ donc f_n est strictement croissante sur $[0;1]$. f_n est donc continue et strictement monotone sur $[0;1]$ et $0 \in f_n([0;1]) = [-1;1]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $[0;1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^n = -u_n + 1 \Rightarrow u_n^{n+1} = u_n - u_n^2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n - u_n^2 + u_n - 1 = -u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n - 1)^2$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(u_n) \leq 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$
5. $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ et $u_n \in [0;1]$ et $u_{n+1} \in [0;1]$
   f_{n+1} étant strictement croissante sur $[0;1]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel $\ell \in [0;1]$