TS- DS n°5-le 19 Janvier 2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (environ 6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$$

1. **a.** Etudier la limite de f en 0.
   b. Etudier la limite de f en $+\infty$
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C_f.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$
   b. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x > 0$
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de f.
3. **a.** Démontrer que la courbe C_f a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 2 : (environ 6 points)

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut-être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherche pas à étudier la fonction g.
On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit solution strictement positive de l'équation :

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$$

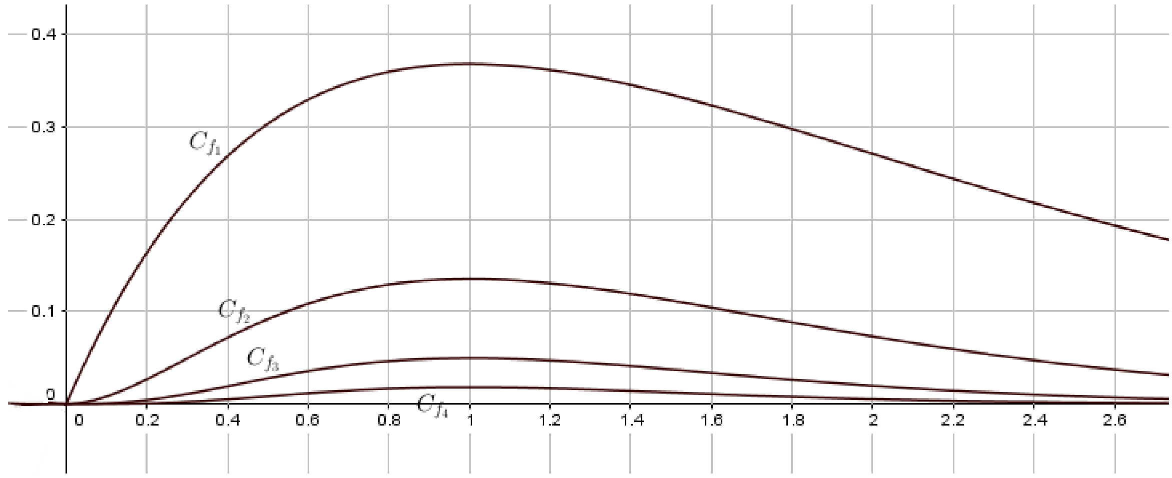
Dans la suite, on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geq 0$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0;+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 (On ne cherchera pas à déterminer la valeur de x_0).
4. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle$[0;+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;x_0]$.
5. Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si on note a cette valeur, déterminer une valeur approchée de a au centième.

Exercice 3 (environ 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-nx}$

Partie A Dans un repère, on a tracé les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2 et f_3 :



Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le maximum des fonctions f_n et sur la valeur pour laquelle ils sont atteints ?

Partie B Démonstration de la conjecture :

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f_n admet un maximum sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de ce maximum lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (environ 4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1** :

$$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}}$$

2. **Affirmation 2** :

L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

3. **Affirmation 3** :

$f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+5x}{7x^3}\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(3+5x) - \ln 7 - 3\ln x$ sont égales sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{5}\right[$

4. **Affirmation 4** :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+sin^2(x))}{\sin^2(x)} \text{ pour } x \in]0;\pi[\\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases} \text{, est continue sur } [0;\pi[.$$