BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

février 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 7

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat non spécialiste doit traiter les quatre exercices 01-02-03-04.
Le candidat spécialiste doit traiter les quatre exercices 01-02-03-05.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté (ou la moitié s'il y a deux réponses exactes ...); une réponse inexacte enlève le quart du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions : la question ne rapporte alors aucun point et n'en coûte aucun.
Les réponses devront être ***justifiées*** *: en l'absence de justification la réponse ne sera pas prise en compte.*
Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont exactes.
Si le total de points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Une solution de $z^2 + 2z + 4 = 0$ est dans $\mathbb{C}$:
   $\boxed{\text{a}}$ $1 + \text{i}$ $\boxed{\text{b}}$ $-\sqrt{3} - \text{i}$ $\boxed{\text{c}}$ $2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ $\boxed{\text{d}}$ $-1 - \text{i}\sqrt{3}$.

2. Soit z_1 et z_2 les nombres complexes définis par $z_1 = \sqrt{3} - \text{i}$ et $z_2 = 2\text{i} - z_1$.
   Alors $\dfrac{z_2}{z_1} =$:
   $\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\text{b}}$ $-\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ $\boxed{\text{c}}$ $2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ $\boxed{\text{d}}$ $\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

3. Soit (Δ) l'ensemble des points M, du plan, d'affixe z tels que $|z - 2i| = |z + 3i|$
   $\boxed{\text{a}}$ (Δ) est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
   $\boxed{\text{b}}$ (Δ) est un cercle de centre de centre $A(2i)$ et de rayon 3.
   $\boxed{\text{c}}$ (Δ) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
   $\boxed{\text{d}}$ (Δ) ne contient aucun point.

4. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x+\text{i}y$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\text{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :
   $\boxed{\text{a}}$ La droite d'équation $y = -x$
   $\boxed{\text{b}}$ Le cercle de centre $\text{I}(-1 + \text{i})$ et de rayon $\text{R} = 2$
   $\boxed{\text{c}}$ La droite d'équation $\text{y} = \text{x}$
   $\boxed{\text{d}}$ Le cercle de diamètre [AB], A et B étant les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -2$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$.

5. Soit $\text{A}(-2\text{i})$, $\text{B}(6)$ et $\text{C}(4 + 6\text{i})$. Le triangle ABC est :
   $\boxed{\text{a}}$ quelconque

   $\boxed{\text{b}}$ isocèle
   $\boxed{\text{c}}$ rectangle
   $\boxed{\text{d}}$ équilatéral

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

   b) Montrer quela suite (u_n) est décroissante.
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0{,}5u_n}{0{,}5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0{,}5u}{0{,}5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

   Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

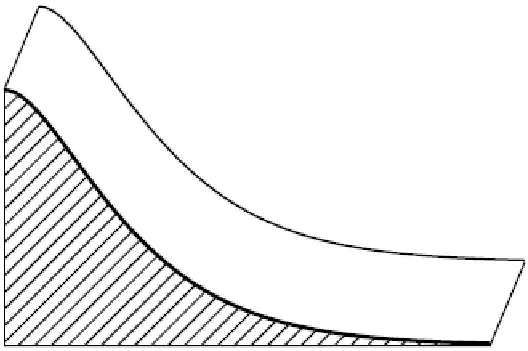
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

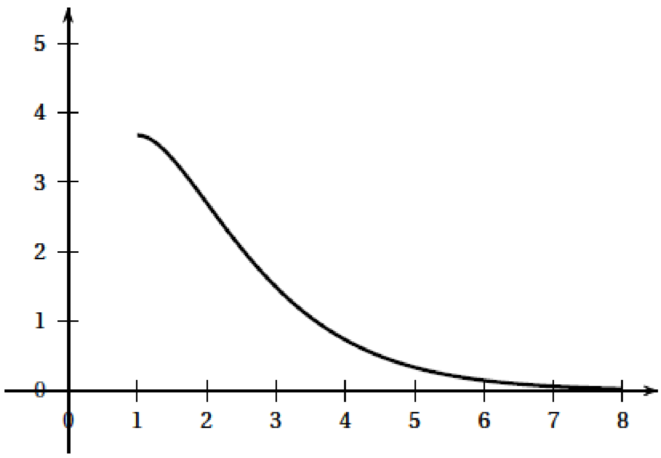


Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B : Etude de la fonction f sur $\mathbb{R}$

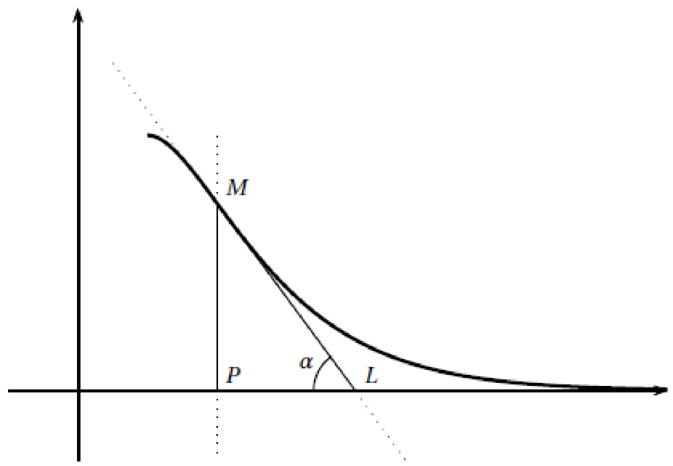
On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition de f.
2. En déduire les éventuelles asympotes verticales et horizontales, à la courbe représentative de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$
4. Dresser le tableau des variations complet de f sur $\mathbb{R}$ puis sur $[1; 8]$

Partie C : Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1 ; 8]$.
2. Soit m un réel de l'intervalle $]1 ; 8]$ et soit M le point d'abscisse m de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(m)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 4 **5 points**

* * *

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

* * *

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huitres : "la plate" et "la japonaise". Chaque année, les huitres plates représentent 15 % de sa production.
Les huitres sont dites de calibre numero 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g. Seulement 10 % des huitres plates sont de calibre numero 3, alors que 80 % des huitres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huitre au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.
   On considère les évenements suivants :
   • J : "L'huitre prélevée est une huitre japonaise".
   • C : "L'huitre prélevée est de calibre numero 3".

   a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
   b) Calculer la probabilité que l'huitre prélevée soit une huitre plate de calibre numéro 3.
   c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huitre de calibre numero 3 est de 0,695.
   d) Le service sanitaire a prélevé une huitre de calibre numero 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huitre plate ?
2. On choisit au hasard un échantillon de 15 huitres dans le stock dh'uitres de cet ostréiculteur. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 15 huitres dans le stock.
   On appelle X la varible aléatoire qui donne le nombre d'huitres de calibre 3 de l'échantillon choisi.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 6 huitres de calibre numero 3 ? On arrondira à 10^{-3}.
   c) Quelle est la production que cet échantillon comporte au moins 9 huitres de calibre numero 3 ? On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 5 **5 points**

* * *

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

* * *

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Déterminer le PGCD de 51 et 26, en déduire que cette équation admet au moins une solution.
2. a) **Question de cours** : Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.
   b) Donner un couple solution $(x_0 \;;\; y_0)$ de cette équation.
   c) Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26. La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1 \ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?