TS-Corrigé du DS n°2

Exercice 1 :

Partie A

1. • Limites en $+\infty$ et $-\infty$:

$$f(x)=\frac{4x-1}{x+2}=\frac{x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{4-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 4-\dfrac{1}{x}=4$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{2}{x}=1$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=4$

• Limites en -2 :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{1}{x+2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \dfrac{1}{x+2}=+\infty$

or $\lim\limits_{x\to-2} 4x-1=-9$ donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=4$ donc la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
De même, les limites en -2 de f étant infinies, la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

3. f est dérivable sur son domaine de définition en tant que fonction rationnelle.

$f'(x)=\dfrac{4(x+2)-(4x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{9}{(x+2)^2}$

Or pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $(x+2)^2>0$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ donc $f'(x)>0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4

Partie B

1. **a.** Soit P_n la propriété « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$ »

• Initialisation : $u_0=5$, $u_1=f(u_0)=\dfrac{19}{7}\approx 2{,}7$ donc $u_0\geqslant u_1\geqslant 1$

P_0 est vraie.

• Hérédité : on suppose que pour un n donné, P_n est vraie.

alors $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant 1$ donc $f(u_n)\geqslant f(u_{n+1})\geqslant f(1)$ car la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$

Or $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(1)=\dfrac{3}{3}=1$

donc $u_{n+1}\geqslant u_{n+2}\geqslant 1$

P_{n+1} est alors vraie

• Conclusion, pour tout $n\in N$, $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant 1$

b. On vient de prouver que (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

2. **a.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\dfrac{4u_n-1-(u_n+2)}{u_n+2}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2-3}{3(u_n-1)}=\frac{u_n-1}{3(u_n-1)}=\frac{1}{3}$$

Donc la suite (v_n) est bien une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{4}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, $v_n=v_0+nr=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{3}$

et $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}\iff u_n=\dfrac{1}{v_n}+1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{3}}+1$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{3}=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{3}=+\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{3}}=0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}=1$

3. On sait que (u_n) est une suite convergente donc il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4u_n - 1 = 4\ell - 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 2 = \ell + 2$, donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{4\ell-1}{\ell+2}$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

donc, par unicité de la limite, $\dfrac{4\ell-1}{\ell+2} = \ell$

Or $\dfrac{4\ell-1}{\ell+2} = \ell \iff 4\ell - 1 = \ell(\ell+2) \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 2 :

1. $f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 9 = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + 9 = 5$

2. $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 = -\left(2\sqrt{3}\right)^2$

   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

3. $f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

   Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

   $\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$; $\Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$

   L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty; 8[$.

4. **a.** $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x+\mathrm{i}y)^2 + 2(x+\mathrm{i}y) + 9 = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$

   b. $f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$

   Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

Exercice 3

1. Pour tout $z \neq 0$, $Z = \dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z} = \dfrac{x + \mathrm{i}y - 2\mathrm{i}}{x + \mathrm{i}y} = \dfrac{(x+\mathrm{i}y-2\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2}$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

   $Z = \dfrac{x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy + y^2 - 2\mathrm{i}x - 2y}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2 + y^2 - 2\mathrm{i}x - 2y}{x^2+y^2}$

   M imaginaire pur $\iff Re(z) = 0 \iff \dfrac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2} = 0$

   $\dfrac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 = 1.$

   On reconnait l'équation d'un cercle de centre le point de coordonnées $(0;1)$ et de rayon 1. Cependant, il faut enlever de l'ensemble des solutions le point O puisque $z \neq 0$, donc (F) est un cercle privé de l'origine.

   La proposition 1 est fausse.

2. $z_{\mathrm{A}} = \overline{(1-5\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) - 10 + 11\mathrm{i}}$
   $= (1+5\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) - 10 - 11\mathrm{i}$
   $= 2 - \mathrm{i} + 10\mathrm{i} + 5 - 10 - 11\mathrm{i}$
   $= -3 - 2\mathrm{i}$

   $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
   $= \dfrac{(1+3\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}$
   $= \dfrac{-\mathrm{i}+3}{1}$
   $= 3 - \mathrm{i}$

   $z_{\mathrm{C}} = 13\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} + 1 + 10\mathrm{i}$
   $= 13\dfrac{(2-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{3^2+2^2} + 1 + 10\mathrm{i}$
   $= 6 - 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 2 + 1 + 10\mathrm{i}$
   $= 5 + 3\mathrm{i}$

   $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{-3-4\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}$
   $= \dfrac{(-3-4\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{(-1)^2+2^2}$
   $= \dfrac{3+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-8}{5}$
   $= -1 + 2\mathrm{i}$

   donc $z_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} = (-1+2\mathrm{i}) - (-3-2\mathrm{i}) = -1 + 2\mathrm{i} + 3 + 2\mathrm{i} = 2 + 4\mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} = (5+3\mathrm{i}) - (3-\mathrm{i}) = 5 + 3\mathrm{i} - 3 + \mathrm{i} = 2 + 4\mathrm{i}$

   $z_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \iff$ ABCD est un parallélogramme. **La proposition 2 est vraie**

3. Quelques exemples ne suffisent pas à prouver une propriété. **La proposition 3 est fausse**.

4. Si une suite (u_n) est positive, alors pour tout n, $u_n \geqslant 0 \geqslant -3$, donc (u_n) est bien minorée par -3.

   La proposition 4 est vraie.

5. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée, mais elle n'est pas convergente. **La proposition 5 est fausse**