Durée : 2 heures

∽ Devoir surveillé n°7 ∾

QUESTION PRÉLÉMINAIRE **2 points**

On note f et g deux fonctions définies et dérivables sur $[a, b]$ avec f' et g' continues sur $[a, b]$.
En utilisant la formule de dérivation d'un produit, démontrer que

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

EXERCICE 1 **9 points**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right) \mathrm{d}x$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On admet que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

   a. Démontrer à l'aide de la question préléminaire que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.
   (On pourra poser $f : x \mapsto -e^{-x}$ et $g : x \mapsto 2+x$)

   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que

   $$\frac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$$

   c. Démontrer que $J + K = 4I$.

   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

EXERCICE 4 **11 points**

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Étude des variations de la fonction f

   a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

   b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2. En déduire la valeur moyenne de f sur $[1;2]$

2. Une relation de récurrence

   a. Démontrer, à l'aide de la question préléminaire, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

   (On pourra poser $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{n-1}}$ et $g : x \longmapsto -e^{\frac{1}{x}}$)

   b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n

   a. Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a :
   $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

   b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).