TS-DS n°3-Le 17 Novembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (environ 9 points)

On note f la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
3. On note (D) la droite d'équation $y = x-2$
   (a) Montrer que pour tout x dans le domaine de définition, $f(x)-(x-2) = \dfrac{3x+1}{(x+1)^2}$
   (b) En déduire la position relative entre $\mathscr{C}_f$ et (D).
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x-2)]$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$ et (D) en $\pm\infty$?
4. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x^3+3x^2+2)}{(x+1)^4}$
5. On note $g : x \mapsto x^3+3x^2+2$
   (a) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $-4 < \alpha < -3$
   (c) Déterminer un encadrement de α à 10^{-4} près et une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   (d) Dresser le tableau des signes de $g(x)$
6. Déterminer le tableau des variations de f

Exercice 2 : (environ 3 points)

On note $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & si \quad x \in]-\infty;0[\\ 0 & si \quad x = 0 \\ |x| & si \quad x \in]0;+\infty[\end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (Jusitifiez)
2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (Jusitifiez)
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 3 : (environ 4 points)

On note $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

1. Calculer $P(2)$ puis vérifier que $P(z) = (z-2)(z^2+2\sqrt{2}z+4)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
   On note z_1 et z_2 les solutions autres que 2 avec $Im(z_1) > 0$. Montrer que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on note A le point d'affixe 2, B le point d'affixe z_1 et C le point d'affixe z_2.
   Montrer que OAB est un triangle isocèle.
4. Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 4 : (environ 4 points)

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto x^n + x - 1$ définie sur $[0;1]$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$ que l'on note u_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^{n+1} = u_n - u_n^2$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = -(u_n-1)^2$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer $f_{n+1}(u_{n+1})$ et $f_{n+1}(u_n)$
5. En déduire que (u_n) est une suite croissante.
6. Que peut-on en déduire ?