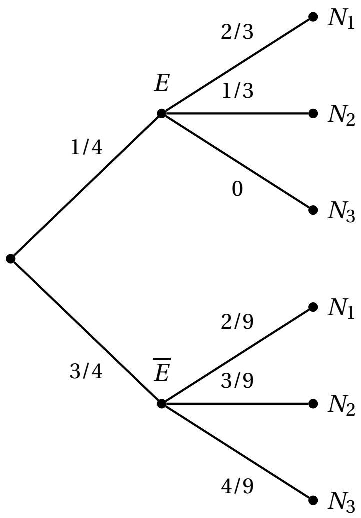
TS- DS n°4-le 8 décembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. L'énoncé donne :
$p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{225}{300} = \dfrac{3}{4}$, $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_1) = \dfrac{50}{225} = \dfrac{2}{9}$, $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{75}{225} = \dfrac{3}{9}$,$p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_3) = \dfrac{100}{225} = \dfrac{4}{9}$, $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_1) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{2}{3}$, $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_3) = 0$



2. **a.** On a $p(\mathrm{E}\cap\mathrm{N}_2) = p(\mathrm{E}) \times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

b. Il y a 50 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{2}{3} = 100$ personnes qui vont au 1^er^ étage ;

Il y a 75 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{1}{3} = 100$ personnes qui vont au 2^e^ étage ;

Il y a 100 personnes qui vont au 3^e^ étage ;

Les évènements N_1, N_2, N_3 sont bien équiprobables.

c. Il faut trouver : $p_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{p(\mathrm{E}\cap\mathrm{N}_2)}{p(\mathrm{N}_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

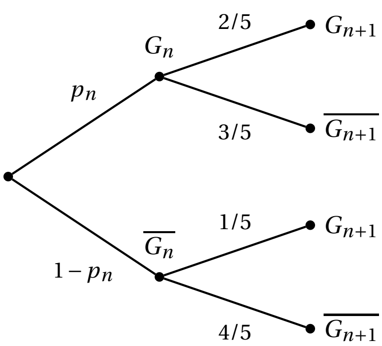
3. **a.** On répète 20 fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli dont le succès : " la personne va au 2nd" a une probabilité de $\dfrac{1}{3}$.

La variable aléatoire X donnant le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{3}$
.

b. On a donc :$p(X=5) = \dbinom{20}{5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \times \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^{20-5} = 15504 \times \dfrac{2^{15}}{3^{20}} \approx 0{,}1457$.

Exercice 2

1.



2. G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :
$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{1}{5}\left(1 - p_n\right) = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. a. Pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.

   (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

   b. On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

   Comme $u_n = p_n - \dfrac{1}{4} \iff p_n = u_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

   c. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.
   Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

Exercice 3 :

f est la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Sur $[0;2\pi]$, $\sqrt{3} - 2\cos(x) \geqslant 0 \iff -2\cos(x) \geqslant \sqrt{3} \iff \cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$

2. f est dérivable sur son domaine de définition en tant que différence de fonctions dérivables.
$f'(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$.
D'après la question précédente, on sait que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$ donc f est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{6}; 2\pi\right]$

3. $T : y = f'(0)x + f(0)$. Or $f'(0) = \sqrt{3} - 2$ et $f(0) = 0$
donc $T : y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x$

4. Soit g la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par $g(x) = -2\sin(x) + 2x$

   a. g est dérivable sur son domaine de définition en tant que différence de fonctions dérivables.
   $g'(x) = -2\cos x + 2 = 2(1 - \cos x)$. Or $\forall x \in [0;2\pi]$, $1 - \cos x \geqslant 0$ donc g est croissante

x	0	2π
g	0 $\nearrow$	4π

   b. g est donc positive sur $[0;2\pi]$.

   c. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T sur $[0;2\pi]$,
   il faut étudier le signe de $f(x) - \left(\sqrt{3} - 2\right)x = \sqrt{3}x - 2\sin x - \left(\sqrt{3} - 2\right)x = -2\sin(x) + 2x = g(x)$. Or on sait que g est positive sur $[0;2\pi]$ donc $\mathscr{C}_f$ est toujours au dessus de T.

Exercice 4 :

PARTIE A :
On considère la fonction f définie pour tout x de $[-1;1]$ par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.

1. * Dérivabilité de f en 1 : pour $h \neq 0$ et $1 + h \in [-1;1]$ soit $h \in [-2;0[$:
$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{(1 - 1 - h)\sqrt{1 - (1+h)^2}}{h} = \dfrac{-h\sqrt{1 - (1+h)^2}}{h} = -\sqrt{1 - (1+h)^2}$
or $\displaystyle\lim_{h\to 0} -\sqrt{1 - (1+h)^2} = 0$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$
* Dérivabilité de f en -1 : pour $h \neq 0$ et $-1 + h \in [-1;1]$ soit $h \in]0;2]$:
$\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{(1 + 1 - h)\sqrt{1 - (-1+h)^2}}{h} = \dfrac{(2-h)\sqrt{1 - (1 - 2h + h^2)}}{h} = (2-h)\sqrt{\dfrac{2h - h^2}{h^2}}$
$= (2-h)\sqrt{\dfrac{2}{h} - 1}$

or $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2}{h} - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt{\dfrac{2}{h} - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{h\to 0} 2 - h = 2$, donc par produit

$\lim\limits_{h\to 0^+} (2-h)\sqrt{\dfrac{2}{h} - 1} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1 .

2. La fonction : $x \longmapsto 1 - x^2$ est dérivable et est strictement positive sur $]-1;1[$ donc $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ l'est aussi et par produit , f est dérivable sur $]-1;1[$.

$f'(x) = -1 \times \sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-(1-x^2) - x + x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$

Pour tout $x \in]-1;1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - x - 1$.

3. $2x^2 - x - 1$ a pour racines : 1 et - 0,5 d'où

x	-1		$-0,5$		1
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

4. * Sur $]-1;-0,5]$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

De plus, 1 est compris entre $f(-1) = 0$ et $f(-0,5) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

il existe un unique réel $\alpha \in]-1;-0,5]$ tel que $f(\alpha) = 1$.

* Sur $[-0,5;1]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus, 1 est compris entre t $f(-0,5) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et $f(1) = 0$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

il existe un unique réel $\beta \in]-1;-0,5]$ tel que $f(\beta) = 1$.

* La calculatrice donne :$f(-0,840) \approx 0,998$ et $f(-0,839) \approx 1,0007$ ainsi une valeur approchée de α à 10^{-3} près est $-0,839$

et $f(0) = 1$ donc la valeur exacte de β est 0.

PARTIE B :

1. L'aire du triangle IAA' vaut $\dfrac{AA' \times HI}{2} = AH \times HI$

A, A' et H ont la même abscisse x.

A (x ;y) est un point du cercle $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$, ainsi :

$AH = \sqrt{1-x^2}$ et $HI = 1 - x$ ainsi l'aire du triangle IAA' vaut $AH \times HI = (1-x)\sqrt{1-x^2} = f(x)$

2. D'après A 3. f atteint son maximum pour $x = -0,5$, ainsi il faut choisir $H(-0,5;0)$ pour que l'aire du triangle IAA' soit maximale . L'aire du triangle IAA' est alors de $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ unités d'aire.

3. D'après A 4. $f(x) = 1$ pour $x = \alpha$ ou $x = 0$ donc pour que l'aire du triangle IAA' soit égale à 1, il faut que $H = O$ ou bien $H(\alpha;0)$.