TS-DS n°1-Le 22 septembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (environ 9 points)

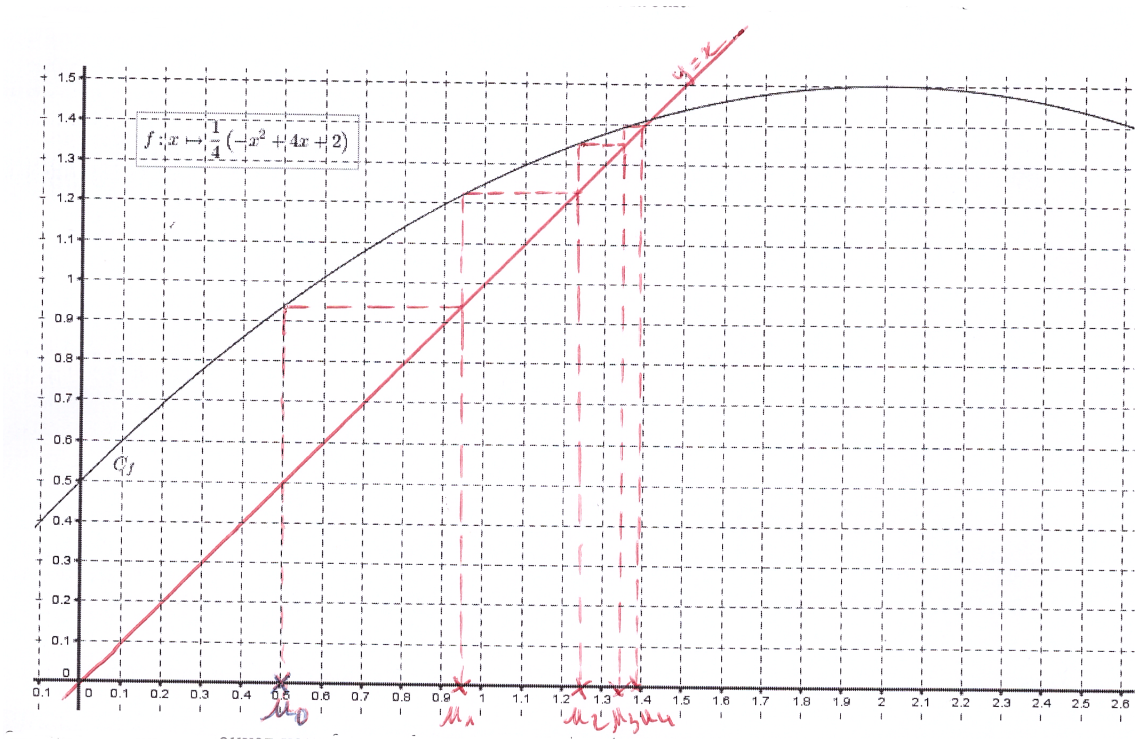
Partie 1 Préliminaires

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0;+\infty[$
   $f'(x) = \frac{1}{4}(-2x+4)$ et $-2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
f	$0,5$	$\nearrow$	$1,5$

2. L'abscisse x du point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x$
   $f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ or $x \in [0;2]$ donc $x = \sqrt{2}$

Partie 2 Etude de la suite

1. 

2. Il semble que la suite (u_n) soit strictement croissante.
3. Il semble que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$
4. (a) On note P_n la propriété : "$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$", $n \in \mathbb{N}$

   Initialisation Montrons que P_0 est vraie : $u_0 = 0,5$ or $\frac{1}{2} \leq 0,5 \leq \sqrt{2}$ donc P_0 est vraie.

Hérédité On suppose que pour une valeur fixée de n, P_n est vraie et donc que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$.

Montrons qu'alors P_{n+1} l'est aussi.

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$ or f est strictement croissante sur $[0;2]$ donc

$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \frac{31}{8} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

Conclusion $\left\{\begin{array}{l} P_0 \text{ est vraie} \\ \text{Si} P_n \text{ est vraie alors } P_{n+1} \text{l'est aussi} \end{array}\right.$ donc pour tout n entier naturel : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(-u_n^2 + 4u_n + 2) - u_n = -\frac{1}{4}u_n^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(u_n^2 - 2)$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n^2 \leq 2 \Leftrightarrow u_n^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(u_n^2 - 2) \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

5. (a) La suite (u_n) est majorée et croissante donc elle est convergente.

(b) La suite (u_n) est convergente donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ par unicité de la limite.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n^2 = -\ell^2$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n^2 + 4u_n + 2 = -\ell^2 + 4\ell + 2$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(-\ell^2 + 4\ell + 2\right) = f(\ell)$

Par unicité de la limite, on a donc : $\ell = f(\ell)$ avec $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \sqrt{2}$ donc d'après la question $I.2$ on obtient $\ell = \sqrt{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

Partie 3 Algorithmiques

L'algorithme ci-dessous permet d'afficher à partir de quel rang n le terme u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-N} près.

Exercice 2 : (environ 6 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = 2 - \frac{1-3n^3}{n^2+2n^3} = 2 - \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3} - 3\right)}{n^3\left(\frac{1}{n} + 2\right)} = 2 - \frac{\left(\frac{1}{n^3} - 3\right)}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)} \text{ or } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} - 3 = -3 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 2 = 2$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

2. $\frac{2}{5} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 5$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -(-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - (-1)^n \leq 3$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > 0$ donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{2-(-1)^n}{1+n} \leq \frac{3}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$ donc d'après <u>le théorème d'encadrement</u> (dit des gendarmes) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 3 : (environ 5 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{nu_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{1}{2}(nu_n + 1 - 2) = \frac{1}{2}(nu_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$

donc(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 1u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 * q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}(v_n + 1) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) = \frac{1+(0,5)^n}{n}$

3. $0,5 \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 0,5^n = 1$ et donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+0,5^n}{n} = 0$