TS- DS de rattrapage du second trimestre

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (environ 10 points)

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
$$\frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{3}{4} < 10^{-7} - \frac{3}{4}$$
2. On note A et B les points d'affixes respectifs $z_A = 3i$ et $z_B = 1 - 2i$.
Décrire l'ensemble des points $M(z_M)$ du plan qui vérifie $|z_M - 3i| = |z_M - 1 + 2i|$
3. On note $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$. Montrer que $arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. On note $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. Déterminer l'écritute algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$

Exercice 2 (environ 10 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par
$$f(x) = x + e^{-x}$$

Partie A :

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B :
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par $u_1 = 0$ et
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif :
$$\ln(1 + x) \leq x$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
$$\ln(n + 1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$$
(on pourra utiliser la question 1. avec $x = \frac{1}{n}$)
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$$
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
$$\ln(n) \leq u_n$$
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.