Correction DS n°5

Exercice 1 (environ 6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$$

1. **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1+\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$

b. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

c. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à C_f et la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

2. **a.** f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $x^2\neq 0$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{x(1-2(1+\ln x))}{x^4}=\frac{1-2-2\ln x}{x^3}=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

b. $-1-2\ln x>0\Leftrightarrow -1>2\ln x\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}>\ln x\Leftrightarrow e^{-1/2}>x$ donc $S=\left]0;e^{-1/2}\right[$

On obtient donc le tableau des signes ci-dessous :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

c. D'après le tableau des signes précédent et les limites de la question 1 :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
	$\|$		$\frac{1}{2}e$		
$f'(x)$	$\|$	$\nearrow$		$\searrow$	
	$\|$ $-\infty$				0

$$f\left(e^{-1/2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}}=\frac{1}{2}e$$

3. **a.** Sur $]0;+\infty[$, $f(x)=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$

donc C_f admet un point d'intersection avec l'axe des abscisses, au point $A\left(e^{-1};0\right)$

b. D'après les informations précédentes :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 2 : (environ 6 points)

1. f est le produit et la somme de fonctions composées dérivables sur $[0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $[0;+\infty($:

$$f'(x)=1e^{2x}+(x-1)(2e^{2x})-1=(2x-1)e^{2x}-1$$

$f'(0)=-1e^0-1=-1-1=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

2. f' est le produit et la somme de fonctions composées dérivables sur $[0;+\infty[$, donc f' est dérivable sur $[0;+\infty($:

$$f''(x)=2e^{2x}+(2x-1)(2e^{2x})=(2+(4x-2))e^{2x}=4xe^{2x}$$

3. • f' est dérivable sur $[0;+\infty[$ donc f' est <u>continue</u> sur $[0;+\infty[$
• $f''(x)$ est du signe de $4x$ car pour tout $x\in[0;+\infty[$, $e^{2x}>0$. f' est donc strictement croissante sur $[0;\infty[$ donc <u>strictement monotone</u> sur $[0;+\infty[$
• $0\in f'([0;+\infty[)=[-2;+\infty[$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f'(x)=0$ admet une unique solution x_0 sur $[0;+\infty[$.

4. D'après la question précédente :

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
	-2				
f		$\searrow$		$\nearrow$	

f est décroissante sur $[0;x_0]$ et $f(0)=-2$ donc pour tout $x\in[0;x_0]$, $f(x)$ est négatif.

5. $f(2) = (2-1)e^4 - 1 - 2 = e^4 - 3 \approx 51,6$
   - $0 \notin f([0;x_0])$
   - f est dérivable donc <u>continue</u> sur $[x_0;+\infty[$
   - f est <u>strictement monotone</u> sur $[x_0;+\infty[$
   - $0 \in f([x_0;+\infty[)$

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.
   On obtient, à l'aide de la calculatrice : $1,19 < a < 1.20$

Exercice 3 (environ 4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-nx}$

Partie A Il semble que le maximum des fonctions f_n se rapproche de 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et que ce maximum est atteint pour la valeur 1.

Partie B Démonstration de la conjecture :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est le produit de composées de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ donc f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx} + x^n(-ne^{-nx}) = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x)$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;+\infty[$, $nx^{n-1}e^{-nx} > 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $x-1$ et donc f_n est croisante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Le maximum M de f_n est donc atteint pour $x = 1$ et sa valeur est :
   $$M = f_n(1) = e^{-n}$$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} M = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{N\to-\infty} e^N = 0$

Exercice 4 (environ 4 points)

1. **L'affirmation est vraie :**
   - $\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{9}{2} = 8$ et $\dfrac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}} = \dfrac{2\times 3}{\dfrac{3}{4}} = 6 \times \dfrac{4}{3} = 8$
2. **L'affirmation est fausse :**
   L'équation existe si et seulement si $x > 1$ et $x > -2$ donc on travaille sur $]1;+\infty[$
   $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4 \Leftrightarrow x - 1 = 4(x+2) \Leftrightarrow x = -3 \notin]1;+\infty[$
3. **L'affirmation est fausse** :
   f est définie sur $\left]-\infty;-\dfrac{3}{5}\right[\cup]0;+\infty[$ et g sur $]0;+\infty[$
4. **L'affirmation est vraie** :
   - $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+sin^2(x))}{\sin^2(x)}$ est le quotient de composées de fonctions dérivables sur $]0;\pi[$ car $\sin x \neq 0$ sur $]0;\pi[$ donc f est dérivable et continue sur $]0;\pi[$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sin^2(x) = 0^+$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln(1+sin^2(x))}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\X>0}} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 donc sur $[0;\pi[$