TS-DS n°1-Le 22 septembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

NOM : Prénom : Classe :

Exercice 1 : (environ 9 points)

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sute définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(-u_n^2 + 4u_n + 2\right) \end{cases}$

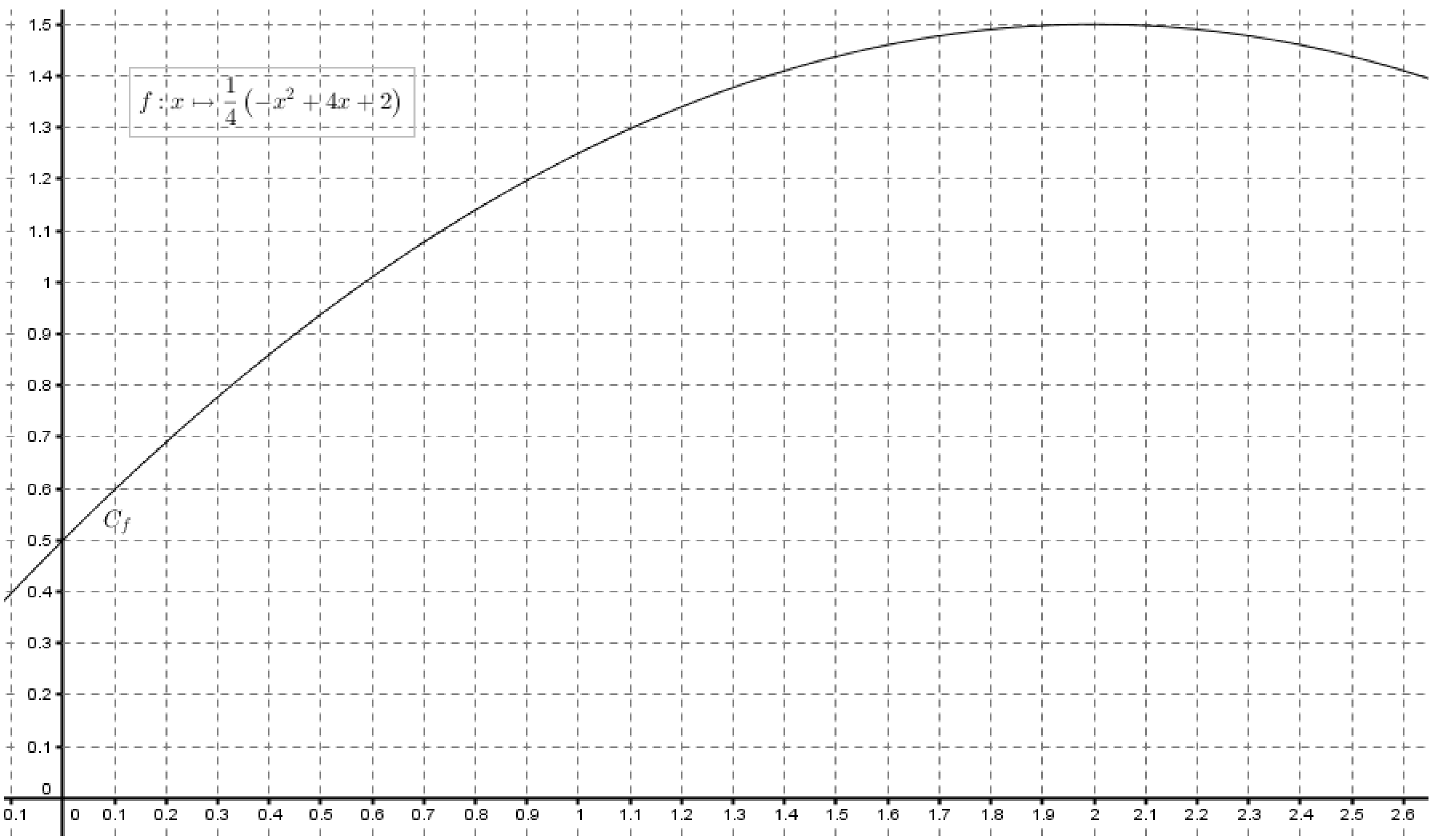
On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{4}(-x^2 + 4x + 2)$ sur $[0; +\infty[$

Partie 1 Préliminaires

1. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[0; 2]$.
2. Déterminer sur $[0; 2]$ l'abscisse du point d'intersection entre C_f (la courbe représentative de f) et la droite d'équation $y = x$.

Partie 2 Etude de la suite

1. Construire, sur l'axe des abscisses, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On laissera les traits de construction.



2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$
   (b) En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. (a) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 3 Algorithmique

Expliquer ce que fait l'algorithme ci-dessous :

```
Début de l'algorithme
Saisir N
Epsilon prend la valeur de 10^(-N)
u prend la valeur de 0,5
n prend la valeur de 0
Tant que √2 − u  > Epsilon
    u prend la valeur de  0,25(-u²+4u+2)
    n prend la valeur de n+1
Fin du Tant que
Afficher n
Fin de l'algorithme
```

Exercice 2 : (environ 6 points)

Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \dfrac{1-3n^3}{n^2+2n^3}$
2. (u_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$ par $u_n = 5\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)$
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2-(-1)^n}{1+n}$

Exercice 3 : (environ 5 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n+1}{2(n+1)}$.

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1+(0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).