Devoir surveillé Terminales S

Exercice 1 **4 points**

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à $0,06$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.
   c. En déduire la valeur attendue de σ'.
3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,06$. On considère les conformités de chaque pot indépendantes les unes des autres.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
   a. Montrer que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
   b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive au moins un pot non conforme.

Exercice 3 **7 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,
$\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \leqslant 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$$

   est une primitive de la fonction h.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 3 **4 points**

Toute trace de recherche sera évaluée dans cet exercice.

Soit (OI) un axe gradué d'origine O tel que $OI = 1$. On considère un segment $[AB]$ de longueur p, avec $0 < p < 1$, et le segment $[OI]$ de longueur 1. On choisit au hasard (loi uniforme) un point M sur $[OI]$. X est la variable aléatoire qui correspond à l'abscisse de M. Quelle est la probabilité que l'on puisse construire un triangle avec les longueurs des 3 segments $[AB]$,$[OM]$, et $[MI]$? On pourra commencer par raisonner sur les cas particulier $p = 0,7$ et $p = 0,3$ puis généraliser.

Question Bonus (évaluée uniquement si tout le DS à été traité)

Deux personnes A et B décident de se retrouver au café de l'hôtel de ville entre 7h et 8h. Les instants d'arrivé de A et B sont assimilé à des variables aléatoire de loi uniforme sur $[0\ ,\ 1]$. Chacun attend un quart d'heure mais jamais au delà de 8h. Déterminer la probabilité que A et B se rencontrent.

BON COURAGE !

Annexe

Exercice 1