Correction Bac Blanc FÃ©vrier 2016

EXERCICE 1

1. $z^2+2z+4=0$
   $\Leftrightarrow (z+1)^2+3=0 \Leftrightarrow (z+1)^2-(i\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow (z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})=0$
   Il y a donc deux solutions complexes conjuguÃ©s : $z_1=-1+i\sqrt{3}$ et $\boxed{z_2=-1-i\sqrt{3}}$
   ou $\boxed{z_1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ ou $z_2=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ donc
   RÃ©ponses : $\boxed{\text{c}}$ et $\boxed{\text{d}}$
2. $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ donc
   RÃ©ponse $\boxed{\text{d}}$.
3. On note $A(2i)$ et $B(-3i)$.
   $|z-2i|=|z_M-z_A|=AM$ et $|z+3i|=|z_M-z_B|=BM$
   donc $|z-2i|=|z+3i| \Leftrightarrow AM=BM$
   (Δ) est donc la mÃ©diatrice de $[AB]$ donc une droite parallÃ¨le Ã l'axe des abscisses.
   RÃ©ponse $\boxed{\text{a}}$
4. On note $A(-2)$ et $B(2i)$
   $arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\text{i}}\right)=arg(z+2)-arg(z-2i)\ [2\pi]=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})-(\overrightarrow{u},\overrightarrow{BM})\ [2\pi]=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$
   donc
   $arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\text{i}}\right)=(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})\ [2\pi]=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
   Les points M sont donc sur le cercle de diamÃ¨tre $[AB]$ mais pas en A ni en B. Soit I le milieu de $[AB]$ alors $z_I=-1+i$ et $IA=|-2+1-i|=|-1-i|=\sqrt{2}$ donc les points M ne sont pas sur le cercle de centre $I(-1+i)$ et de rayon 2.
   RÃ©ponse $\boxed{\text{d}}$
5. $AB=|z_B-z_A|=|6+2i|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
   $AC=|z_C-z_A|=|4+6i+2i|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$
   $BC=|z_C-z_B|=|4+6i-6|=|-2+6i|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
   Donc ABC est isocÃ¨le en B$etdepluscomme$AB$^2+BC^2=AC^2$ alors d'aprÃ¨s la rÃ©ciproque du thÃ©orÃ¨me de Pythagore, ABC est rectangle en B.
   RÃ©ponses $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$

EXERCICE 2

Partie A

1. On note $P(n)$, la propriÃ©tÃ© :"$u_n > 1$", pour $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation :
   $u_0 = 2 > 1$ donc $P(0)$ est vraie.
   HÃ©rÃ©ditÃ© :
   On suppose que pour une valeur de n dans $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie donc que $u_n > 1$.
   Montrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.
   On note f la fonction dÃ©finie par $f(x) = \dfrac{1+3x}{3+x}$ sur $\mathbb{R}^+$. f est une fonction rationnelle donc dÃ©rivable sur son ensemble de dÃ©finition donc sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{3(3+x)-(1+3x)}{(3+x)^2} = \frac{9+3x-1-3x}{(3+x)^2} = \frac{8}{(3+x)^2} > 0$$

   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   On sait que $0 < u_n < 1$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $f(u_n) > f(1)$
   $Pour tout$n$\in \mathbb{N}^*$, f(u$_n$) $= u_{n+1}$ et $f(1) = \dfrac{4}{4} = 1$ donc $u_{n+1} > 1$ et $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion :
   $P(0)$ est vraie et $P(n)$ implique $P(n+1)$ sonc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$
2. **a.** Pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{(1+3u_n) - u_n(3+u_n)}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
   b. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n > 0$, $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est strictement croissante.
   (u_n) est strictement croissante et majorÃ©e, donc elle converge.

Partie B

1. Tableau :

i	1	2	3
u	0,8	1,077	0,976

2. Il semble que la suite (u_n) converge vers 1.

3. On considÃ¨re la suite (v_n) dÃ©finie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n} - 1}{\dfrac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n} + 1} = \dfrac{1 + 0,5u_n - 0,5 - u_n}{1 + 0,5u_n + 0,5 + u_n} = \dfrac{0,5 - 0,5u_n}{1,5 + 1,5u_n} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1 - u_n}{1 + u_n} = -\dfrac{1}{3}v_n$

Donc (v_n) est une suite gÃ©omÃ©trique de raison $-\dfrac{1}{3}$

b. $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ ou $v_n = \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}$

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \neq 3^{n+1}$ donc $v_n \neq 1$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{1 + u_n} \Leftrightarrow (u_n + 1)v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \Leftrightarrow$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$ donc on peut divisier par $v_n - 1$ et on obtient

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

c. $-\dfrac{1}{3} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + v_n) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - v_n) = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

EXERCICE 3

Partie A : ModÃ©lisation

1. Si la tangente Ã la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est horizontale alors $f'(1) = 0$. f est le produit et la composition de fonctions dÃ©rivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dÃ©rivable sur $\mathbb{R}$:
   $f'(x) = ae^{-x} + (ax+b)(-e^{-x}) = (a - ax - b)e^{-x}$
   $f'(1) = -be^{1} = 0 \Leftrightarrow b = 0$ donc $f(x) = axe^{-x}$
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situÃ© entre 3,5 et 4 mÃ¨tres de haut donc que $3,5 \leq f(1) \leq 4$
   or $f(1) = ae^{-1}$ et comme $e^{-1} > 0$ alors a est un entier entre $3,5e^{1}$ et $4e^{1}$
   donc $a = 10$ et $f(x) = 10xe^{-x}$

Partie B : Etude la fonction f sur $\mathbb{R}$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 10\dfrac{x}{e^x}$
   ▷ Par croissance comparÃ©e, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par inverse $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$
   ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} 10xe^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -10Xe^{X}$
   or $\lim\limits_{X\to+\infty} -10X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$
   donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc C_f admet une asymptote horizontale d'Ã©quation $y = 0$, en $+\infty$.
3. D'aprÃ¨s la partie I, $f'(x) = (a - ax - b)e^{-x)=(10-10x)e^{-x}=10(1-x)e^{-x}}$
4. $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$10e^{-1}$	↘	0

Tableau des variations sur $[1;8]$:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	$10e^{-1}$	↘	$80e^{-8}$

Partie C : Une contrainte Ã vÃ©rifier

1. f' est le produit et la composition de fonctions dÃ©rivables sur $[1;8]$ donc f' est dÃ©rivable sur $[1;8]$
$f''(x) = -10e^{-x} - 10(1-x)e^{-x} = (10x-20)e^{-x}$
Donc $f''(x)$ est du signe de $10x - 20$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

x	1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$-10e^{-2}$	$\nearrow$	

2. Calculons les coordonnÃ©es du point L :
L est sur la tangente Ã C_f au point d'abscisse m. L'Ã©quation de cette tangente est donc

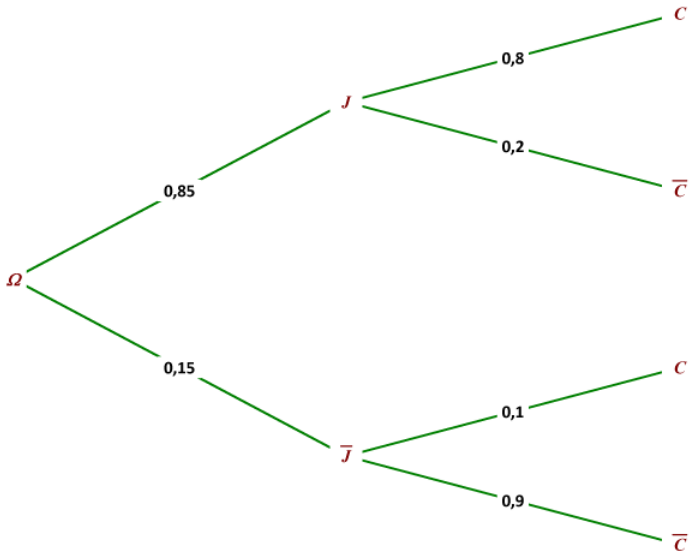
$$y = f'(m)(x-m) + f(m)$$

$y = 0 \Leftrightarrow f'(m)(x-m) + f(m) = 0 \Leftrightarrow f'(m)x = mf'(m) - f(m)$
or M est d'abscisse diffÃ©rent de 1 donc $f'(m) \neq 0$ donc onpeut diviser par $f'(m)$
$x = \dfrac{mf'(m) - f(m)}{f'(m)}$ donc $L\left(\dfrac{mf'(m) - f(m)}{f'(m)};0\right)$
$PL = \dfrac{mf'(m) - f(m)}{f'(m)} - m = \dfrac{mf'(m) - f(m) - mf'(m)}{f'(m)} = \dfrac{-f(m)}{f'(m)}$
$\tan\alpha = \dfrac{MP}{PL} = \left|\dfrac{f(m)}{\dfrac{-f(m)}{f'(m)}}\right| = \left|-f'(m)\right| = \left|f'(m)\right|$

3. Le minimum de la fonction $|f'|$ sur $]1;8]$ est $10e^{-2} \approx 1,353$
donc $\alpha \approx 53,54$ degrÃ©s. Le toboggan est conforme aux contraintes imposÃ©es.

EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spÃ©cialitÃ©

1. **a.** Arbre pondÃ©rÃ© :



   b. $P(\overline{J} \cap C) = P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(C) = 0.15 \times 0.1 = 0,015$

   c. J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers donc d'aprÃ¨s la formule de probabilitÃ© totale,
   $P(C) = P(\overline{J} \cap C) + P(J \cap C) = 0,015 + P(J) \times P_J(C) = 0,015 + 0,85 \times 0,8 = 0,695$

   d. $P(C) \neq 0$ donc $P_C(\overline{J}) = \dfrac{P(\overline{J} \cap C}{P(C)} = \dfrac{0,015}{0,695} \approx 0,0216$

2. **a.** On choisit une huitre au hasard. Soit elle est de calibre 3 avec une probabilitÃ© de $p = 0,695$ soit elle n'est pas de calibre 3 avec une probabilitÃ© de $1 - p = 0,305$.
   On rÃ©pÃ¨te ce tirage 15 fois de faÃ§on indÃ©pendante et identique et on donne Ã X le nombre d'huitres de calibre 3 obtenue. X suit donc une loi binomiale de paramÃ¨tres $n = 15$ et $p = 0,695$.

   b. $P(X = 6) = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} p^6(1-p)^9 \approx 0,013$

   c. $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \approx 0,859$