∽ Correction devoir surveillé Terminales S ∾

Exercice 1 **4 points**

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
D'après le cours, pour $t > 0$, $P(X \leqslant t) = \text{e}^0 - \text{e}^{-\lambda t} = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$.
$$P(X \leqslant 2) = 0,15 \iff 1 - \text{e}^{-\lambda\times 2} = 0,15 \iff 0,85 = \text{e}^{-2\lambda} \iff \ln(0,85) = -2\lambda \iff \frac{\ln(0,85)}{-2} = \lambda$$
$$\iff \lambda = -\frac{\ln(0,85)}{2}$$

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

1. Pour $t > 0$: $P(X \geqslant t) = \text{e}^{-\lambda t}$.
Donc $P(X \geqslant 3) = \text{e}^{-3\times 0,081} \approx 0,78$
2. Pour tous réels positifs t et h : $P(X \geqslant t) = \text{e}^{-\lambda t}$ et $P(X \geqslant t+h) = \text{e}^{-\lambda(t+h)}$
$$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P\left[(X \geqslant t)\cap(X \geqslant t+h)\right]}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}$$
$$= \frac{\text{e}^{-\lambda(t+h)}}{\text{e}^{-\lambda t}} = \frac{\text{e}^{-\lambda t}\times\text{e}^{-\lambda h}}{\text{e}^{-\lambda t}} = \text{e}^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$$
3. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans.
La probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2)$.
La loi exponentielle est une loi sans vieillissement donc : $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,15 = 0,85$.
4. D'après le cours, pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
Donc $E(X) = \dfrac{1}{0,081} \approx 12,35$.
Ce qui veut dire que la durée moyenne de vie d'un moteur est de $12,35$ années (c'est la durée que l'on peut espérer qu'il vive).

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On cherche $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. Par dé finition, la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
   c. Comme $\sigma' > 0$ alors
   $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma' Z + 50$
   $p(X \leqslant 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$
   On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \dfrac{1}{1,555} \approx 0,643$
   La valeur attendue de σ' est donc $0,643$.
3. **a.** Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité $0,06$,... ou pas.
   On répète 50 fois cette épreuve de manière indépendante. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et $0,06$.
   b. $p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - 0,06)^{50} \approx 0,955$

Exercice 3 **7 points**

Partie A

1. Soit u le nombre complexe $1-\mathrm{i}$.

   $|u|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; donc $u=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)$

   On cherche le réel α tel que $\left\{\begin{array}{lcl}\cos(\alpha) & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\alpha) & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

   L'écriture complexe du nombre $u=1-\mathrm{i}$ est donc $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$.

2. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$ donc

   $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})=(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))(1-\mathrm{i})=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)-\mathrm{i}\cos(\theta)-\mathrm{i}^2\sin(\theta)$

   $\qquad=\cos(\theta)+\sin(\theta)+\mathrm{i}\,(\sin(\theta)-\cos(\theta))$ (forme algébrique)

   $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ (écriture exponentielle)

3. Le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$ s'écrit d'une part $(\cos(\theta)+\sin(\theta))+\mathrm{i}\,(\sin(\theta)-\cos(\theta))$ et d'autre part $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

   En identifiant les parties réelles, on obtient : $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
On définit la fonction h sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. D'après les graphiques :
   a. On peut conjecturer que les limites des fonctions f et g en $+\infty$ sont égales à 0.
   b. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble située en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur leurs domaines de définitions.
   c. L'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semble maximal pour $x=2$.

2. Pour tout $x\in[0\,;\,+\infty[$, $g(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)=(1-\cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}$

   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$ et $\cos(x)\leqslant 1$ donc $(1-\cos(x))\geqslant 0$; donc, pour tout x, $g(x)-f(x)\geqslant 0$ et donc la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. - On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$; donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet la droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
   - Pour tout x réel, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant+1$ et comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, $-\mathrm{e}^{-x}\leqslant\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\leqslant\mathrm{e}^{-x}$.

     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos(x)=0$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0;+\infty[$ en tant que produits de fonctions dérivables,donc, par somme, la fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$:

   $h'(x)=g'(x)-f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-(-\mathrm{e}^{-x}\cos(x)+\mathrm{e}^{-x}(-\sin(x)))=\mathrm{e}^{-x}(-1+\cos(x)+\sin(x))$

   On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ, $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$, donc

   $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos(x)+\sin(x)$.

   On peut donc en déduire que $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]$.

b.

- On se place dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

$$\iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$$

$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$$

- On se place dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

$\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$$

$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$$

c. $h(x) = g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-\cos(x))$
$h(0) = \mathrm{e}^{0}(1-\cos(0)) = 1(1-1) = 0$
$h(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-\cos(2\pi)) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-1) = 0$
$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}(1-0) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,21$
On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		$+$		$+$	
$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0		$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$		0

5. On admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par $H(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$ est une primitive de la fonction h. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.
On a démontré dans la question **2.** que, pour tout x, $g(x)-f(x) \geqslant 0$ donc on peut en déduire que $h(x) \geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$.
Donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x$
On sait que la fonction h est une primitive de la fonction h, donc :

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = H(2\pi) - H(0) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+\cos(2\pi)-\sin(2\pi)] - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}[-2+\cos(0)-\sin(0)] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+1] - \frac{1}{2}[-2+1]$$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi}$ unité d'aire

Exercice 3 **4 points**

En reformulant la question, le problème à résoudre est :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(0,1)$, et $p \in]0;1[$. Quelle est la probabilité que l'on puisse construire un triangle avec les trois longueurs : $\begin{cases} AB = p \\ OM = X \\ MI = 1-X \end{cases}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir construire un triangle ABC avec trois longueurs a,b,c est : $\begin{cases} a+b \geq c \\ a+c \geq b \\ c+b \geq c \end{cases}$.
On peut construire un triangle de dimensions a,b,c si et seulement si ces trois **inégalités triangulaires** sont vérifiées .
Avec les notations de l'exercice, on résout le système :

$$\begin{cases} OM+MI \geq AB \\ OM+AB \geq MI \\ MI+AB \geq OM \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X+1-X \geq p \\ X+p \geq 1-X \\ 1-X+p \geq X \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq p \\ X \geq \dfrac{1-p}{2} \\ X \leq \dfrac{1+p}{2} \end{cases} \leftrightarrow \quad \dfrac{1-p}{2} \leq X \leq \dfrac{1+p}{2}$$

en effet la première condition
est toujours vérifiée pour $p \in]0;1[$

Or X suit $\mathscr{U}(0,1)$, donc $P\left(\dfrac{1-p}{2} \leq X \leq \dfrac{1+p}{2}\right) = \dfrac{\text{largeur de l'intervalle favorable}}{\text{largeur de l'intervalle total}} = \dfrac{\dfrac{1+p}{2} - \dfrac{1-p}{2}}{1-0} = \dfrac{2p}{2} = p$