TS- DS n°9-le 27 Avril 2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (environ 6 points)

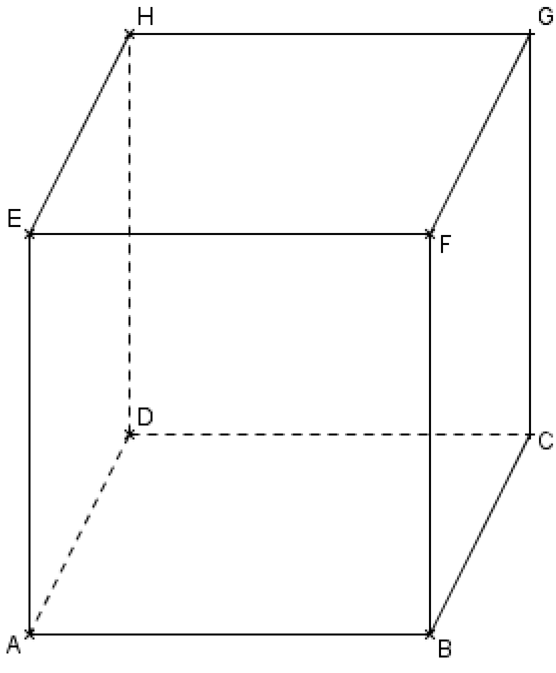
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$
, $u_n = S_n - \ln(n)$, f la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ et enfin $k \in \mathbb{N}^*$

1. Démontrer que pour tout $x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$$
Aide : On pourra écrire les inégalités de la question précédente pour $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, ..,$k = n-1$ puis les additionner pour obtenir l'encadrement demandé.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{n+1}$ et en déduire que $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$
6. Déduire de la question précédente que le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
7. Que peut-on conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 2 : (environ 4 points)

On note $ABCDEFGH$ un cube et (IJK) le plan tel que I est le milieu de $[EH]$, J le milieu de $[FB]$ et K le milieu de $[BC]$.

1. Construire, sur cette feuille, la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK)



2. On note $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ un repère de l'espace.

   a. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   b. Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK)
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF)
   d. Déterminer les coordonnées du point L intersection de (EF) avec (IJK).

Exercice 3 : (environ 3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
On note $\overrightarrow{u}$ et les $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

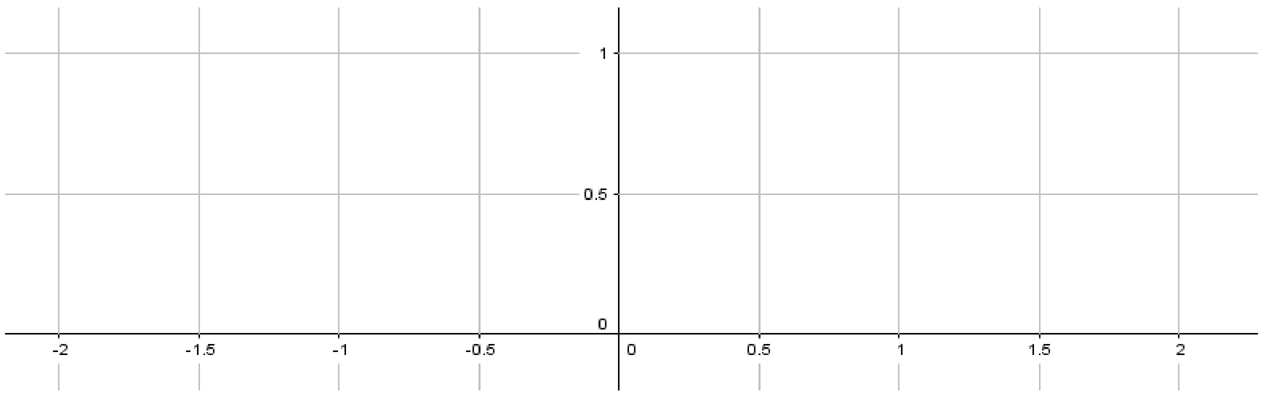
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non colinéaires.
2. On note $A(3;1;2)$ et $B(2;6;1)$. Montrer que le point B est un point du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
3. On note $D(2;4;1)$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires.

Exercice 4 (environ 5 points)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty;-1] \\ x+1 \text{ si } x \in]-1;0] \\ -x+1 \text{ si } x \in]0;1] \\ 0 \text{ si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

1. Tracer, sur cette feuille, la fonction f dans le repère ci-dessous



2. Montrer que f définie une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
3. On note X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f.
   Sans faire de calcul, mais par des considérations graphiques, déterminer :
   a. $P(X \leq 0)$
   b. $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$
   c. $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$
4. On note $a \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de a :
   a. $P(X \leq a)$ pour $a \in]-\infty;-1]$
   b. $P(X \leq a)$ pour $a \in [0;1]$
   c. $P(X \leq a)$ pour $a \in]1;+\infty[$

Exercice 5 (environ 2 points)

Pour $k \in \mathbb{R}$, On note f_k la fonction définie par $f_k : x \mapsto k^2x - \frac{1}{2}k$ sur $[0;1]$

1. Déterminer la ou les valeur(s) de k pour que f_k soit une densité de probabilité sur $[0,1]$
2. (Question Bonus) On not X une variable aléatoire rélle de densité de probabilité f_k pour la ou les valeur(s) de k de la première question. Déterminer $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$