TS- DS n°4-le 8 décembre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (environ 5 points)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2e niveau.

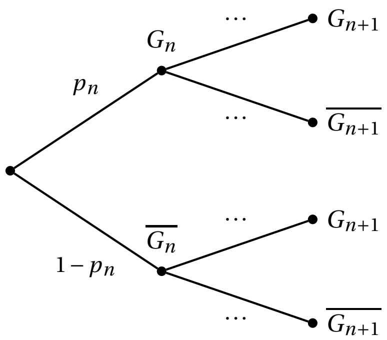
Exercice 2 (environ 4 points)

Un site internet propose un jeu en ligne :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

   a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

   c. Déterminer la limite de p_n. Interpréter ce résultat.

Exercice 3 : (environ 5 points)

f est la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation $\sqrt{3} - 2\cos(x) \geqslant 0$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;2\pi]$ (On ne demande pas de tableau de variation).
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Soit g la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par $g(x) = -2\sin(x) + 2x$

   a. Dresser le tableau de variations de g sur $[0;2\pi]$.

   b. En déduire le signe de g sur $[0;2\pi]$.

   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T sur $[0;2\pi]$.

Exercice 4

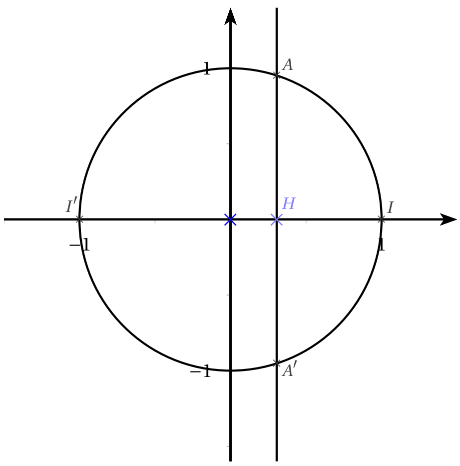
Partie A (environ 6 points)

On considère la fonction f définie pour tout x de $[-1;1]$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
2. Montrer que pour tout x de $]-1;1[$, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - x - 1$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions α et β ($\alpha < \beta$). Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près et la valeur exacte de β .

BONUS- Partie B (2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le cercle de centre O, d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et les points I et I' de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(-1;0)$. Par tout point H d'abscisse x du segment $[II']$ distinct de I et de I', on mène la perpendiculaire à à (II') passant par H, elle coupe le cercle en A et A'.



1. Montrer que l'aire du triangle IAA', exprimée en fonction de x, est donnée par l'expression $f(x)$ de la partie A.
2. Où faut-il placer H pour que l'aire du triangle IAA' soit maximale ? Quelle est alors l'aire du triangle IAA' ?
3. Où faut-il placer H pour que l'aire du triangle IAA' soit égale à 1 ? Donner toutes les possibilités.