TS- Correction DS n°9-le 27 Avril 2016

Exercice 1 (environ 6 points)

1. Pour tout ,$k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [k;k+1]$, $k \leq x \leq k+1$ or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$

   Par croissance de l'intégrale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$

   donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k}\int_k^{k+1} dx$

   or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} dx = [x]_k^{k+1} = k+1-k = 1$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k}}$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k}$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

   $\triangleright$ $\displaystyle\int_1^n f(x)dx = [\ln(x)]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$

   $\triangleright$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n - 1$

   $\triangleright$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} = S_n - \frac{1}{n}$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \dfrac{1}{n}}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente : $S_n - \ln(n) \leq 1$ et $S_n - \ln(n) \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{0 \leq u_n \leq 1}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [n;n+1]$ comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{x}$

   par croissance de l'intégrale

   $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$ or $\displaystyle\int_n^{n+1} dx = [x]_n^{n+1} = n+1-n = 1$ donc

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$

   D'après la question précécente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0}$

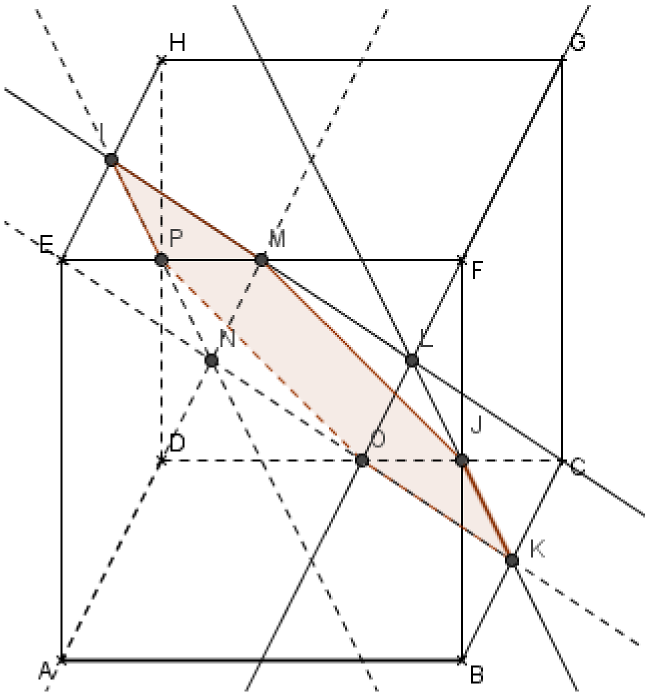
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = S_{n+1} - S_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$

   donc la suite u est décroissante.

7. D'après la question 4. la suite u est minorée et d'après la question 6. la suite u est décroissante donc d'après le théorème des suites monotones, la suite u est convergente et converge vers un nombre $\gamma \in [0;1]$

Exercice 2 : (environ 4 points)

1. Section du cube



2. Dans le repère donné :

a. $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $J\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

b. le plan (IJK) est aussi le plan $(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ donc une équation paramétrique de (IJK) est $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t + t' \\ z = 1 - \frac{1}{2}t - t' \end{cases}$, $t, t' \in \mathbb{R}$

c. $E(1;0;1)$ et $F(1;1;1)$

La droite (EF) est la droite $(E, \overrightarrow{EF})$ avec $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

donc une équation paramétrique de (EF) est $\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d. Pour déterminer l'intersection entre (EF) et (IJK) , il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \alpha = t + t' \\ 1 = 1 - \frac{1}{2}t - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ \alpha = 1 + t' \\ t' = -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ t' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donc le point d'intersection M est de coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 3 : (environ 3 points)

1. $1 \times 1 = 1$ et $1 \times (-1) = -1$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles et les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Une équation paramétrique de $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est $\begin{cases} x = 3 + t + t' \\ y = 1 + t - t' \\ z = 2 + t + t' \end{cases}$, $t, t' \in \mathbb{R}$

Existent-ils t et t't dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2 = 3 + t + t' \\ 6 = 1 + t - t' \\ 1 = 2 + t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t + t' \\ 5 = t - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -3 \end{cases} \quad \text{donc } B \in (A, \vec{u}, \vec{v})$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires si et seulement si il existe α et β deux réels tels que $AD=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$

On cherche donc α et β des réels tels que

$$\begin{cases}-1=-\alpha+\beta\\3=5\alpha+\beta\\-1=-\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=-\alpha+\beta\\3=5\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{3}\\\beta=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

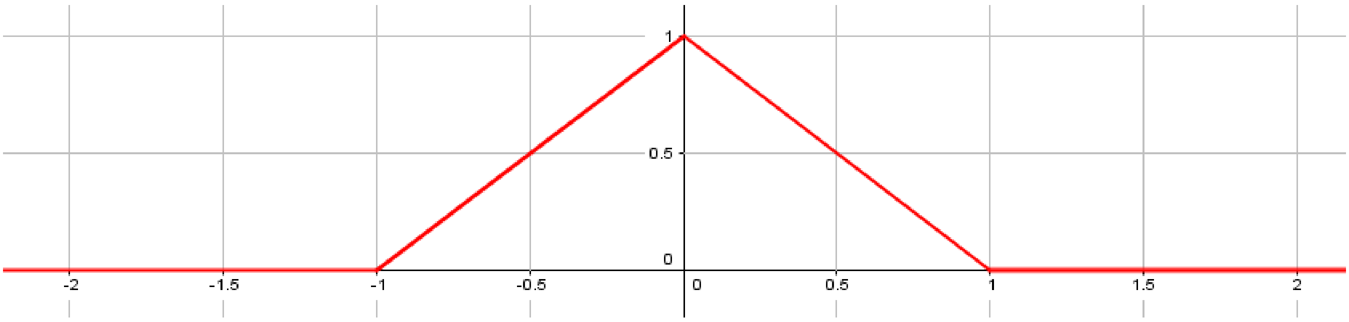
donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires.

Exercice 3 (environ 5 points)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f:x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\in]-\infty;-1]\\[2ex] x+1 \text{ si } x\in]-1;0]\\[2ex] -x+1 \text{ si } x\in]0;1]\\[2ex] 0 \text{ si } x\in]1;+\infty]\end{cases}$$

1. Tracer, sur cette feuille, la fonction f dans le repère ci-dessous



2. • f est une fonction constante sur $]-\infty;-1]$ et sur $]1;+\infty[$ donc f est dérivable donc continue sur $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$

• f est une fonction affine sur $]-1;0]$ et sur $]0;1]$ donc f est dérivable et continue sur $]-1;0]\cup]0;1]$

• $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=0=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=f(-1)$

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=1=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)$

• $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=0=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=f(1)$

donc f est continue en -1, 0 et 1 donc f est <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$

De plus f est <u>positive</u> sur $\mathbb{R}$

et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx&=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{+\infty}f(x)dx\\&=0+\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}(-x+1)dx+0\\&=0+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}+0\\&=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

3. On not X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f.
   - a. $P(X \leq 0) = \dfrac{1}{2}$
   - b. $P\left(X > \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$
   - c. $P\left(-\dfrac{1}{2} \leq X \leq \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$
4. On note $a \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de a :
   - a. Pour $a \in]-\infty; -1]$ $\boxed{P(X \leq a) = 0}$
   - b. (Question Supplémentarire qui n'était pas dans le sujet)
     Pour $a \in [-1; 0]$
     $P(X \leq a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{a} f(x)dx = \int_{-1}^{a} (x+1)dx$
     donc $P(X \leq a) = \left[\dfrac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{a} = \boxed{\dfrac{1}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}}$
   - c. Pour $a \in [0; 1]$
     $P(X \leq a) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx = \dfrac{1}{2} + \left[-\dfrac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{a} = \boxed{-\dfrac{1}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}}$
   - d. Pour $a \in]1; +\infty[$, $\boxed{P(X \leq a) = 1}$

Exercice 4 (environ 2 points)

Pour $k \in \mathbb{R}$, On note f_k la fonction définie par $f_k : x \mapsto k^2 x - \dfrac{1}{2}k$ sur $[0; 1]$

1. • f_k est dérivable donc continue sur $[0, 1]$
   $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{k^2}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}kx\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{2}k = 1 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0$
   • $\Delta = 1 - 4(-2) = 9 = 3^2$ donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes :
   $k_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $k_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$
   • Si $k = 2$ alors $f_k(x) = 4x - 1$ et f_k n'est pas positive sur $[0; 1]$
   • Si $k = -1$ alors $f_k(x) = x + \dfrac{1}{2}$ et f_k est positive sur $[0, 1]$
   Donc la seule valeur de k possible est $\boxed{k = -1}$
2. Question Bonus
   $P\left(\dfrac{1}{3} \leq X \leq \dfrac{2}{3}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x + \dfrac{1}{2}\right)dx = \left[\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3}\right) - \left(\dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{3}$