TS- DS n°2-le 13 octobre 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (environ 10 points)

Partie A

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. En déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$.
   b. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Calculer la limite de la suite (u_n) à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 2 : (environ 4 points)

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Exercice 3 : (environ 6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Soit $Z = \dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z}$ où z est un nombre complexe non nul.
   Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un imaginaire pur.
   Proposition 1 : (F) est un cercle.
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives

   $z_{\mathrm{A}} = \overline{(1-5\mathrm{i})(2+\mathrm{i})-10+11\mathrm{i}}$ $\qquad$ $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

   $z_{\mathrm{C}} = 13\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} + 1 + 10\mathrm{i}$ $\qquad$ $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{-3-4\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}$

   Proposition 2 : ABCD est un parallélogramme
3. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$
   Proposition 3 : (u_n) est croissante.
4. **Proposition 4** : Toute suite positive est minorée par -3.
5. **Proposition 5** : Toute suite bornée est convergente.