TS-DS n°7-Le 31 Mars 2015

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3. **a.** Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,250]$ par $F(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.
   b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;\,100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
   En utilisant le graphique (on laissera les traits de construction) donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

EXERCICE 2 **..... points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5+3t \end{cases}$$

On donne les points $A(1\,;\,1;\,0)$, $B(3\,;0\,;\,-1)$, $C(7\,;1\,;\,-2)$ et $D(-4\,;0\,;\,-3)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{cases}$

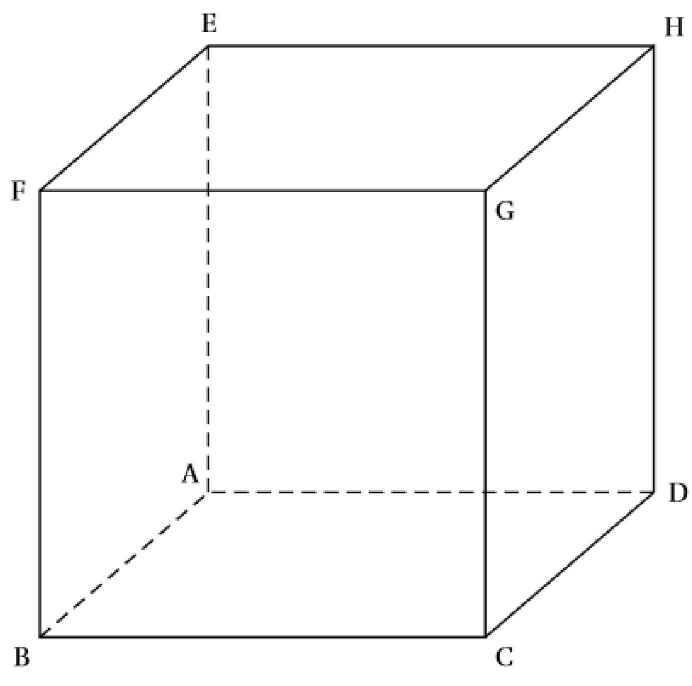
Proposition 2 :
Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 3 : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Proposition 4 : ABC est un triangle rectangle.

EXERCICE 3 **..... points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$. On considère les points $\mathrm{I}\left(1\,;\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, K tel que $\overrightarrow{EK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EF}$ et $\mathrm{L}(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Déterminer en le justifiant, les coordonnées de K.
3. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}$$

4. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Sur la figure ci-dessus fait apparaître la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) en justifiant votre construction.

EXERCICE 4 **..... points**

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On note f la fonction $x \mapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$

Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Annexe (Exercice 1)