DM07 (Terminale S)

« Au fond, je suis dans l'air du temps : pendant que les enfants ouvrent leurs cadeaux de Noël avec excitation, je suspends des exposants aux fonctions comme des boules à des sapins, et j'aligne des factorielles comme autant de bougies renversées.» (Cédric VILLANI)

Exercice 01 (Probabilité)

Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS (voir ci-contre). Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (avec équiprobabilité) vers un sommet voisin. On dit qu'elle « fait un pas ».

1. La fourmi se trouve en A. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit en A ? en B ? en C ? ou en D ?
2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note S_n l'événement « La fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet événement. Donner p_1 et démontrer que
$$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$$
3. Montrer que pour tout entier n strictement positif
$$p_n=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$
4. En déduire la limite de p_n quand $n\mapsto+\infty$

Exercice 02 (Suite et exponentielle)

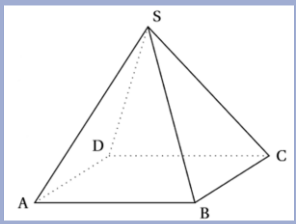
On note f la fonction définie par $f:x\mapsto e^x-x-1$

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+x\le e^x$
2. En déduire que pour $x<1$, $e^x\le\dfrac{1}{1-x}$
3. Déduire du 1) que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le e$
4. Déduire du 2) que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $e\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
5. En déduire un encadrement de e à 10^{-2} près.
6. Soit la suite (u_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Démontrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$: $e-\dfrac{3}{n}\le u_n\le e$ et en déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n$

Exercice 03 : (Complexes)

1) Montrer que $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$
2) En déduire que si $z\in\mathbb{C}$, $z\bar{z}=1$ et $z\ne1$ alors $i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\in\mathbb{R}$
3) En déduire que si $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, $a\bar{a}=b\bar{b}=1$ et $ab\ne-1$ alors $\dfrac{a+b}{1+ab}\in\mathbb{R}$

A rendre le **Vendredi 19 décembre**.



Un peu de présent :

Cédric VILLANI

né le 5 octobre 1973 à Brive-la-Gaillarde. Il est un mathématicien français, directeur de l'Institut Henri-Poincaré et professeur à l'université Claude Bernard Lyon 1. Il a reçu la médaille Fields en 2010.
Spécialiste de l'analyse, il a travaillé sur des problèmes issus de la physique statistique (équation de Boltzmann, amortissement Landau), de l'optimisation (problème du transport optimal de Monge) et de la géométrie riemannienne (théorie synthétique de la courbure de Ricci).