TS-DS n°5-Le 13 Janvier 2014

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (environ 8 points) On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A :

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.
   (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   (b) En déduire le signe de $g(x)$.
2. Tracer la courbe représentative de C_g dans le répère en annexe 01.

Partie B :

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Exercice 2 : (environ 10 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

Partie A : Etude de la fonction f et C_f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) + x \geq 0$ et en déduire la position relative entre C_f et la droite Δ d'équation $y = -x$
4. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B : Comparaison de $\ln(1+t)$ et t

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = \ln(1+t) - t$

1. Etudier les variations de g.
2. En déduire que pour tout nombre réel t positif, $\ln(1+t) \leq t$

Partie C : Etude d'une suite.

Soit n un entier naturel non nul. On considère le nombre $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n} = \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$
2. (a) En utilisant la question B.2., démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$
   (b) En déduire que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < \dfrac{1}{e - 1}$
3. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 3 : (environ 2 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$$

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

   Montrer que f est une fonction impaire.

NOM : **PRENOM :** **CLASSE :**

Annexe 01