TS-DS n°3-Le 18 novembre 2014

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

exercice 1 : (environ 11 points)

Partie A
Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 + 12x - 30$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations complet.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
3. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 1}{x^2 + 4}$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. (a) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(x^2+4\right)^2}$

   (b) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.

Partie C
Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0$
2. Conclure quant à la convergence de (u_n) puis déterminer sa limite.

exercice 2 : (environ 5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\sin x}{2\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{2} \times \dfrac{\sin x}{x}$.

   (b) En déduire que f est continue en 0.

   (c) f est-elle dérivable en 0 ?
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

   (b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

exercice 3 : (environ 4 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \cos^2 x + 2\cos x + 2$.

1. (a) Montrer que u est paire.
   Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

   (b) Montrer que u est périodique, de période 2π.
2. Calculer $u'(x)$

Partie B

On pose $f = \sqrt{u}$. On admettra que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-\sin x(\cos x + 1)}{\sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}}$
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$