TS-DS n°4-Le 9 décembre 2014 -SUJET A-

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

exercice 1 : (environ 5.5 points) Les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. (a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
   (b) Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. (a) Démontrer que $p(\mathrm{S}) = 0,934$.
   (b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.
3. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
   On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B., interpréter ce résultat.
4. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de jouets de ce lot ayant réussi le test de solidité.
   On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Calculer la probabilité que 7 jouets exactement de ce lot réussissent le test de solidité.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un jouet de ce lot échoue au test de solidité.

Tourner SVP

exercice 2 : (4.5 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 0.75 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse mais on enlève 0.25 point en cas de réponse fausse.

1. La partie imaginaire du nombre z est égale à :

   (a) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ **(b)** $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ **(c)** $\dfrac{z-\overline{z}}{2}$ **(d)** $\dfrac{z+\overline{z}}{2i}$

2. Pour tout entier naturel n, $(1+i)^{4n}$ est égale à :

   (a) $(2i)^n$ **(b)** $(4i)^n$ **(c)** $(-4)^n$ **(d)** 0

3. On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de $-\mathrm{i}$, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}$.

   (a) On rappelle que M d'affixe z est un point invariant par f si $z = z'$

   (a) f n'a pas de point invariant **(b)** f a 1 seul point invariant

   (c) f a 2 points invariants **(d)** f a une infinité de points invariants

   (b) On note A le point d'affixe $a = -2+\mathrm{i}$

   (a) le point A$'$, image de A par f, appartient à l'axe des ordonnées.

   (b) le point A$'$, image de A par f, appartient à l'axe des abscisses.

   (c) le point A$'$, image de A par f, n'appartient à aucun de ces deux l'axes.

4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2+1)^5}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   (a) $f'(x) = \dfrac{15x}{(x^2+1)^4}$ **(b)** $f'(x) = \dfrac{-30x}{(x^2+1)^4}$ **(c)** $f'(x) = \dfrac{30x}{(x^2+1)^6}$ **(d)** $f'(x) = \dfrac{-15x}{(x^2+1)^6}$

5. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi} =$

   (a) 0 **(b)** $+\infty$ **(c)** $-\dfrac{1}{2}$ **(d)** 1

exercice 3 : (environ 5.5 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

- T_n : "le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage."
- P_n : " le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. "

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

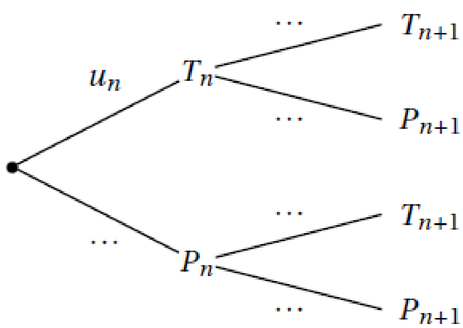
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

   (b) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

   (c) Compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

Tourner SVP

exercice 4 : (environ 4.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1. Montrer que f est périodique de période π.
   On étudie alors cette fonction sur l'intervalle $[0;\pi]$
2. Déterminer la fonction dérivée de f
3. Résoudre sur $[0;\pi]$ l'inéquation $f'(x) > 0$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0.9$ admet une unique solution α dans $[0; \dfrac{\pi}{6}]$.
6. Compléter l'algorithme suivant qui donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} :

   Variables : x, y deux réels

   Début :

   $x \longleftarrow 0$

   $y \longleftarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

   tant que y..... faire

   $x \longleftarrow$ ...

   $y \longleftarrow$ ...

   fin du tant que

   afficher ....

   Fin