DM10 (Terminale S)

« Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.»

(Jean-Marie **Souriau** : http://www.jmsouriau.com/)

A rendre le **Vendredi 27 Mars 2015**

Téléchargement de Xcas

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html

Ou en ligne :

http://www.xcasenligne.fr/

Exercice

Préliminaire :

Notation : $\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = nu_{n-1}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
2. Construire un programme TI82, ou algobox ou Xcas, qui permet de calculer le terme de la suite u au rang n donné.

Dans la suite de ce DM, on note $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ on on lit « factorielle n » ce nombre.

Début du sujet :

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$$

1) Calculer I_1 . On pourra déterminer une primitive de la fonction à intégrer à l'aide du logiciel Xcas (gratuit) en tapant la commande int((2-x)*exp(x).

2) Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$$

3) Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur $[a,b]$ et dont les dérivées sont continues sur $[a,b]$. Montrer à l'aide de la formule de dérivation d'un produit que :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

4) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

5) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$e^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n$$

6) On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{2^n}{n!}$

a) Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et prouver que pour tout entier $n \geq 3$,

$$v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$0 \leq v_n \leq v_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

7) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de (I_n)

8) Justifier enfin que $e^2 = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!}\right)$

9) Cette égalité permet de trouver une valeur approchée de e^2

a) Ecrire un programme qui permet de donner la valeur de $S_n = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots + \dfrac{2^n}{n!}$ en fonction de n . Donner les résultats pour les valeurs de $n \in \{1, 2, 3, 10, 20, 50\}$

b) Ecrire un programme qui permet de donner le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-p} avec p donné. Donner les résultats pour les valeurs de $p \in \{1, 2, 3, 6, 9\}$