DS02 (Terminale S)

La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.
Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.

Exercice 01 ($\approx$2 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0$$

a. Montrer que 2 est solution de (E)
b. Déterminer les réels a, b et c tels que (E) s'écrive $(z-2)(az^2+bz+c)=0$
c. En déduire les solutions de l'équation (E) sous la forme algébrique.

Exercice 02 ($\approx$6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

A tout point M d'affixe z du plan, $z \neq 1+3i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{z}{z-1-3i}$$

1. Déterminer l'affixe de A' sachant que l'affixe de A est $z_A = 2-3i$
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $z' = z$.
3. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
4. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que z' soit réel.
5. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 03 ($\approx$ 3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse donner un contre-exemple qui le prouve. Si elle est vraie on ne demande pas de justifier votre réponse.

1. Une suite bornée est convergente.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Toute suite décroissante et positive converge.
4. Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite v telle que $v_n = u_n^2$
   Si v converge alors u converge.
5. Si u converge vers 1 et v vers 2 alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.
6. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 04 ($\approx$7 points)

On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2-3x}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
2. Interpréter graphiquement les limites de la question 1.
3. Déterminer la fonction dérivée de f .
4. Dresser le tableau des variations de f sur D_f .
5. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0=0$

Exercice 05 ($\approx$2 points)

Déterminer les limites, si elles existent, suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{5x+3x^3}{x^4+1}}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{2x^2+1}$