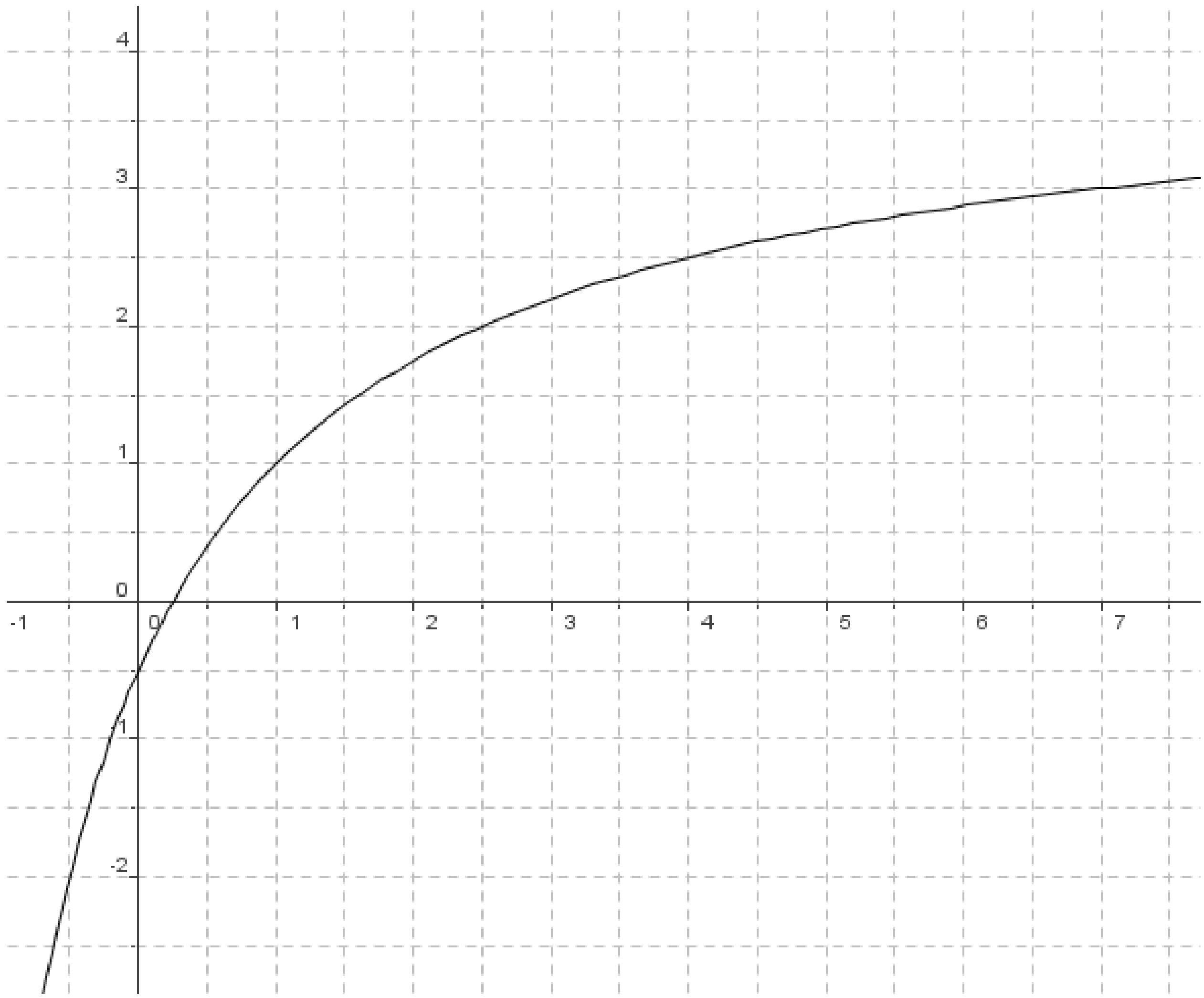
TS-DS n°1-Le 23 septembre 2014

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

exercice 1 : (environ 5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.
2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$.
   (a) On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.
   Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire $u_1,\ u_2$ et u_3 en laissant apparents les traits de construction.



   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$.
   (c) Justifier que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

NOM :

exercice 2 : (environ 4.5 points)

Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes :

1. (u_n) définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \dfrac{3n^4 - 2n^2}{n - 4n^2}$
2. (u_n) définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n - \dfrac{2}{3n^2}$
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\sin(2n)}{n^4 + 3}$

exercice 3 : (environ 4.5 points)

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 800$ et $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

1. Démontrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante.

   Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n).

exercice 4 : (environ 6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

   De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, en déduire que que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).