TS- Bac blanc de maths-Le 3 février 2015

Le candidat doit traiter quatre exercice. L'exercice 4 est l'exercice obligatoire ou spécialité.
L'exercice de spécialité est sur une feuille séparée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points) — Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\text{B}} = \text{i}$.

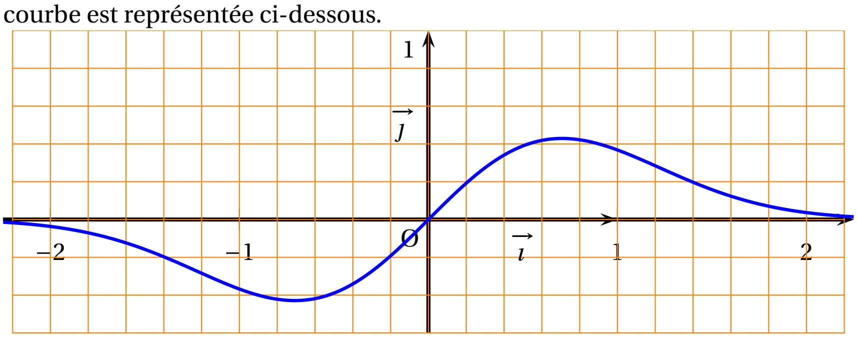
1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de z_C.
   - **b.** Soit K le milieu de $[AC]$. Déterminer l'affixe de K.
   - **c.** Soit C' le point d'affixe $z_{C'}$ telle que $z_{C'} = -\text{i}z_C$. Montrer que $z_{C'} = -\sqrt{3} - \text{i}$.
2. Calculer les longueurs OK et BC'
3. Placer les points A, B, C, C' et K dans le repère $\left(\text{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
4. À tout point M d'affixe $z_M = x+\text{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\text{i}z_M$.
   On désigne par I le milieu du segment $[\text{A}M]$.
   - **a.** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   - **b.** Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   - **c.** Montrer que $\text{B}M' = 2\text{O}I$.
   - **d.** Montrer que (OI) est perpendiculaire à (BM').

Exercice 2 (4 points) — Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\text{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous.



Partie A
A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = 0$.

Partie B

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$).
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Partie C Soit a un nombre réel et Δ_a la droite d'équation $y = ax$.
Selon les valeurs de a, combien Δ_a et $\mathscr{C}_f$ ont-elles de points d'intersection ?

Exercice 3 (6 points) **commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0~;~+\infty[$.

   b. On admet que, pour tout x strictement positif on a

   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14~;~15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{array}\right.$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
   $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

   d. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
n prend la valeur 0
Tant que u − 14,23 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
    n prend la valeur de n + 1
Fin du Tant que
Afficher n
```

   a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier que cet algorithme se termine.

   b. Donner la valeur que cet algorithme affiche.

Exercice 4 (5 points) **réservé aux candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques**

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **a.** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

   c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

   b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

3. Une personne joue maintenant n parties indépendantes en remettant, après chaque parties, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On s'intéresse cette fois au nombre de boules rouges tirées au cours de ces n parties.

   Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'avoir eu au moins une fois une boule rouge soit supérieure à 0,999.

4. On ajoute maintenant 2 boules vertes dans chacune des urnes.

   On considère les évènements suivants :

   R : « obtenir une boule rouge »

   N : « obtenir une boule noire »

   et V : « obtenir une boule verte ».

   Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2. S'il tire une boule rouge, il gagne 3 euros, s'il tire une boule noire, il perd 2 euros et s'il tire une boule verte, il perd 1 euro.

   Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Annexe 1

(Exercice 3)

À rendre avec la copie