DM01 (Terminale S)

«On résout certains problèmes par approximation, en négligeant de petites quantités. » (D'Alembert)

<u>Exercice</u> : Approximation de $\sqrt{5}$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

avec *f* la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $D_f = [0;+\infty[$

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On note ϕ sa solution.

b. Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. On pourra étudier $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour $h > 0$ et $x \in [0;+\infty[$.

c. Etudier les variations de la fonction *f*.

d. Montrer que pour tout *a* et *b* positifs, on a :

$$|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

e. Montrer par récurrence que pour tout n entier :

$$0 \leq u_n \leq \phi$$

f. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$|u_{n+1}-\phi| \leq \frac{1}{2}|u_n-\phi|$$

Et en déduire par récurrence, que pour tout entier naturel *n* :

$$|u_n-\phi| \leq \frac{1}{2^n}|u_0-\phi|$$

g. Déterminer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}|u_n-\phi|$ et en déduire la $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

h. Ecrire un algorithme puis construire un programme à l'aide de la TI ou d'Algobox, permettant de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vous donnerez l'algorithme, puis dans un tableau, les résultats pour les 10 premiers termes.

i. Combien de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit-on calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près ?

Date :

A rendre avant le **vendredi 12 Septembre**.

Un peu d'Histoire :

Jean le Rond D'Alembert

né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

Source : <u>wikipedia</u>