DM03 (Terminale S)

« Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique du monde ne servent à rien si tu n'apprends pas à penser par toi-même. » **(Carlos Ruiz Zafón)**

Exercice 01 :

Dans cet exercice, x désigne un réel dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0=\cos x$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=u_n\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

1. Démontrer que pour tout x réel : $\sin(2x)=2\cos x\sin x$
2. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $v_n=u_n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{2}\sin(2x)$
3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
5. A l'aide d'un programme informatique, vérifier que

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=0$$

   Que peut-on en déduire sur $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
6. En déduire une suite qui converge vers $\frac{2}{\pi}$
7. En déduire une suite qui converge vers π

Exercice 02 :

On rappelle que si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{R}$ alors $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

Sachant que pour tout a et b réel

1. Démontrer que pour a et b de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

   $$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$$
2. Démontrer que pour a et b de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

   $$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Date :

A rendre le **mercredi 4 novembre**.

Un peu d'Histoire :

Hipparque de Nicé

-190 / -120

Il construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de cordes : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre (avec une division du cercle en 360°), la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné.