# DM05 (Terminale S)

« Que vais-je bien pouvoir faire au ciel, durant toute l'éternité, si l'on ne me donne pas une infinité de problèmes à résoudre ?» (**Augustin Louis Baron Cauchy**)

**Exercice 01 :**

On nomme $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{\sqrt{4-\cos^2 x}}{x}$

1. a. Démontrer que pour tout $x > 0$ : $\dfrac{\sqrt{3}}{x} \leq h(x) \leq \dfrac{2}{x}$

   b. En déduire la limite de $h$ en $+\infty$
2. Déterminer la limite de $h$ en $-\infty$

Exercice 02

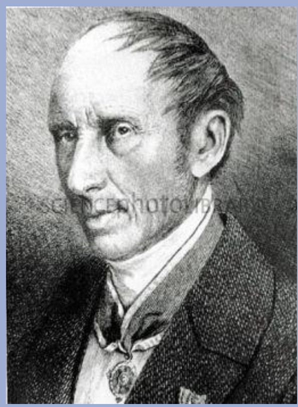
Pour $n \geq 1$ note $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$

1. Démontrer, que pour tout entier $n \geq 1$, l'existence d'une unique solution réelle positive de l'équation :
   $$x^n + x^{n-1} + .... + x - 1 = 0$$
   Cette solution est notée $u_n$.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq 1$
3. Démontrer que la suite u est strictement décroissante. On pourra comparer $f_{n+1}(u_{n+1})$ et $f_{n+1}(u_n)$ puis conclure.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$
   $$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$$
5. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

**Date :**

A rendre le **mercredi 11 novembre**.

**Un peu d'Histoire :**



**Augustin Louis, baron Cauchy,** né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

On lui doit notamment en analyse des **critères de convergence** des suites et des séries entières.