TS-DS n°7-Le 10 mars 2015

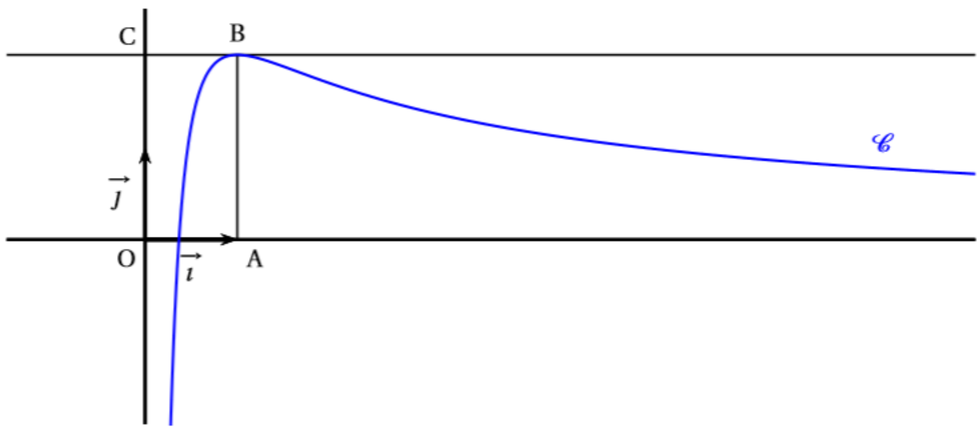
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

exercice 1 : (environ 3 points)

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x^3 + 2x - 1)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}}\,dt$

exercice 2 : (environ 8.5 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(1 ; 2)$, $(0 ; 2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   (c) En déduire que $a = b = 2$.

   Dans la suite, on a donc $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$.

2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   (d) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, puis, à l'aide du graphique, donner le tableau de signes de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   ou : Résoudre $f(x) > 0$, puis tracer le tableau de signes de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = 2\ln x + (\ln x)^2$
   (a) Démontrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
   (b) On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Hachurer $\mathscr{D}$ sur le dessin précédent, puis calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$ et le comparer à l'aire du rectangle OABC.

exercice 3 : (environ 3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On note Ω le point d'affixe 1 , A le point d'affixe $a = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - 2\mathrm{i}$.

1. Donner a sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et Ω en prenant 2 cm comme unité (les traits de construction seront visibles).
3. Déterminer, puis représenter sur le dessin précédent, les ensembles suivants :
   (a) Γ_1 : ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1| = |z-1+2i|$
   (b) Γ_2 : ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1+2i| = |-1-\mathrm{i}\sqrt{3}|$

exercice 4 : (environ 5 points)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$