TS- Bac blanc de maths- n° 2-Le 22 mai 2015

Le candidat doit traiter quatre exercice. L'exercice 2 est l'exercice obligatoire ou spécialité.
L'exercice de spécialité est sur une feuille séparée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4,5 points) — commun à tous les candidats

Les 3 *parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\dfrac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\dfrac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \dfrac{13}{20}$.
   a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?
   b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

La durée de vie T, en année, du principal composant électronique du MP3 de Thomas suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

1. Donner la valeur de $E(T)$, espérance de T. En donner une interprétation.
2. Quelle est la probabilité que ce composant dure plus de 3 ans ?
3. Sachant que le lecteur de Thomas a déjà 2 ans, quelle est la probabilité que le composant ne tombe pas en panne dans les 5 ans qui suivent son achat ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

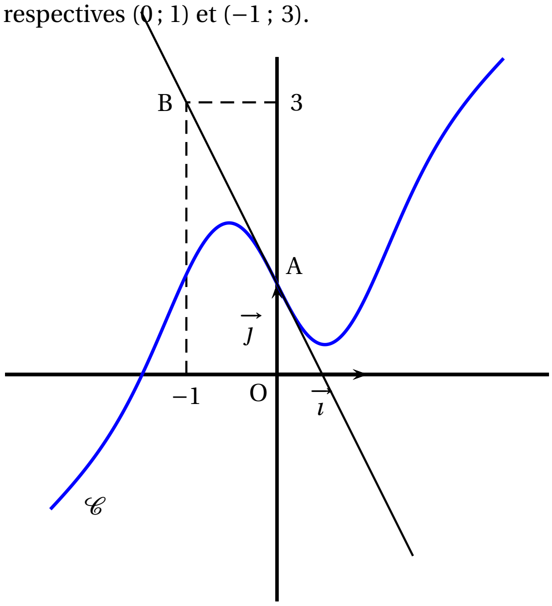
Exercice 2 (5 points) **Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$
   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 3 (5,5 points) **Commun à tous les candidats**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et $(-1\ ;\ 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. **a.** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   c. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, $f(x) > 0$.

   b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

   Justifier que $c < -\dfrac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   a. Écrire, en justifiant, $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

   b. On admet que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près.

   Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 4 (5 points) — Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1+\mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

   b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 2 (5 points) **pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Partie A : préliminaires

1. **a.** Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. **<u>En déduire que</u>** A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\rightarrow X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array} \right.$.

2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{array} \right. \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».