

Correction du DM01 : Des défis sans calculatrice

1. Déterminer la valeur de $A = \sqrt{666666666^2 - 444444444^2 - 222222222^2}$
On note $x = 222222222$ alors :

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{666666666^2 - 444444444^2 - 222222222^2} \\
 &= \sqrt{(3x)^2 - (2x)^2 - x^2} \\
 &= \sqrt{9x^2 - 4x^2 - x^2} \\
 &= \sqrt{4x^2} \\
 &= \sqrt{4} \times \sqrt{x^2} \\
 &= 2x = 2 \times 222222222 = 444444444
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{A = 444444444}$

2. Déterminer la valeur de $B = \sqrt{2006\sqrt{2007 \times 2009 + 1} + 1}$
On note $x = 2008$ alors :

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{2006\sqrt{2007 \times 2009 + 1} + 1} \\
 &= \sqrt{(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1) + 1} + 1} \\
 &= \sqrt{(x-2)\sqrt{x^2 - 1 + 1} + 1} \\
 &= \sqrt{(x-2)\sqrt{x^2} + 1} = \sqrt{(x-2) \times x + 1} \\
 &= \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} \\
 &= x - 1 = 2007
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{B = 2007}$

3. Déterminer la valeur de $C = \sqrt{4 - 2003^2 + 2004^2 + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2}$
On note $x = 2005$ alors :

$$\begin{aligned}
 C &= \sqrt{4 - 2003^2 + 2004^2 + 2005^2 - 2006^2 + 2007^2} \\
 &= \sqrt{4 - (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 - (x+1)^2 + (x+2)^2} \\
 &= \sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 2x + 1) + x^2 - (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4)} \\
 &= \sqrt{4 - x^2 + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x^2 - 2x - 1 + x^2 + 4x + 4} \\
 &= \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = x + 2 = 2007
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{C = 2007}$

4. Déterminer la valeur de $D = \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} \\ &= \sqrt{\frac{(2^3)^{10} + (2^2)^{10}}{(2^3)^4 + (2^2)^{11}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{12} + 2^{22}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} + 1)}{2^{12}(1 + 2^{10})}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}} \\ &= \sqrt{2^{20-12}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16 \end{aligned}$$