DM134 (A rendre avant le mardi 17 Mars)

Archimède est le premier savant qui a démontré que des grandeurs quelconque s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids.
Cet énoncé, appelé principe des leviers, permet d'affirmer que la balance ci-dessus est en équilibre dès que les masses m et m' et les points A, B et G vérifient :

$$m\overrightarrow{GA}+m'\overrightarrow{GB}=\vec{0} \quad (1)$$

On dit alors que le point G, défini par la relation (1), est le barycentre du système $\{(A,m),(B,m')\}$.
Les réels m et m' sont les poids respectifs de A et B.

On peut généraliser cette définition aux cas où m et m' sont des réels de signes quelconques, à condition que m+m' soit différent de 0.

Question 01 :
Donner la position de G sur [AB] pour qu'il y ait équilibre avec m = 50 g m' = 25 g et AB = 9 cm.

Quelques propriétés du barycentre

1. Que peut-on dire de G si m = m' ? Justifier la réponse à partir de la relation (1).

2. Le barycentre G est-il modifié si les poids m et m' sont remplacées par les poids 2m et 2m'? Que peut-on dire de façon plus générale ?

3. En utilisant la relation de Chasles, montrer que , si $m+m'\neq 0$ la relation (1) équivaut à

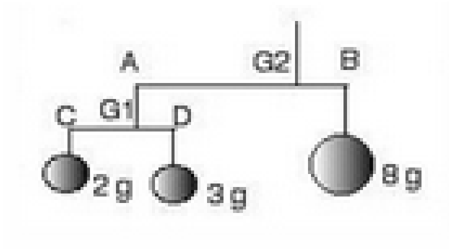
$$\overrightarrow{AG}=\frac{m'}{m+m'}\overrightarrow{AB} \quad (2)$$

4. Utiliser la relation (2) pour reproduire la figure 1 dans le cas où AB = 12, m = 3 et m'= 2.

« Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre. »
Archimède

Mathématicien Grec

5. On souhaite réaliser une suspension en équilibre ayant les caractéristiques visibles sur le schéma ci-dessous. Où doit-on placer G_1 et G_2 pour que l'ensemble soit en équilibre ? Faire un schéma à l'échelle avec AB = 13 cm et CD = 5 cm.



Application :

Une barre parallélépipédique de longueur l = 40 cm et de section S = 1 cm² est constituée pour moitié d'aluminium de masse volumique $\mu_1 = 2{,}7 g.cm^{-3}$ et pour autre moitié de cuivre, de masse volumique $\mu_2 = 8{,}9 g.cm^{-3}$

6. Calculer le volume de la barre puis la masses m et m' des parties d'aluminium et de cuivre de la barre.

7. On note respectivement A et B les centres des parallélépipèdes d'aluminium et de cuivre. On admet que le centre d'inertie G de la barre est le barycentre de $\{(A,m),(B,m')\}$. On note O le centre d'une des deux extrémités de la barre.

   a. A l'aide de la relation (1) et de la relation de Chasles, montrer que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m}{m+m'}\overrightarrow{OA} + \frac{m'}{m+m'}\overrightarrow{OB}$$

   b. Déterminer les distances OA et OB.

   c. Déterminer alors la distance OG entre l'extrémité O de la barre et son centre d'inertie.

« Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre. »
Archimède

Mathématicien Grec