

## DS09 (Seconde D : 1h15)

**La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.**

**Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.**

**La calculatrice est autorisée. (Devoir d'une heure 15 min)**

**Tous les repères utilisés dans ce devoir, sont orthogonaux.**

### Exercice 01 : (4 pts) (10 min)

Dresser les tableaux des signes des expressions suivantes :

$$B(x) = (4 - x)(2x + 3)(x^2 + 3)$$

$$C(x) = \frac{2(x^2 - 25)}{(x - 1)(x + 2)^2}$$

### Exercice 02 : (8 pts) (30 min)

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1) \quad 4(x - 1) - 7(2 - 3x) \geq 3x + 5$$

$$2) \quad 3x(x - 1)(2x - 5) < 3x(2x - 2)$$

$$3) \quad 25x \leq \frac{4}{x}$$

$$4) \quad \frac{1}{x + 3} > \frac{1}{2x + 5}$$

### Exercice 03 : (4 pts) (15 min)

Une P.M.E produit des téléphones. Le coût (en euros) de la production de  $x$  téléphones est donné par la fonction  $C$  définie par

$$C(x) = x^2 - 10x + 1000$$

- Combien peut-on produire de téléphones avec un budget de 1000 euros ?

On considère que l'entreprise vend toute sa production à un prix unitaire de 100 euros (chaque téléphone est vendu 100 euros) et on note  $R$  la recette en fonction de  $x$ .

- Déterminer l'expression de  $R(x)$ , la recette pour  $x$  téléphones.
- Tracer les courbes  $C_c$  et  $C_r$  sur votre calculatrice puis déterminer graphiquement pour qu'elles quantités produites l'entreprise est bénéficiaire.
- Déterminer l'expression  $B(x)$  du bénéfice en fonction de  $x$ .
- Déterminer graphiquement le bénéfice maximal de l'entreprise.

### Exercice 04 : (4 pts) (15 min)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f : x \mapsto x^3 - 3x$$

- A l'aide de votre calculatrice, déterminer graphiquement le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- Montrer que pour tout  $a$  et  $b$  réels, alors  $f(a) - f(b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 3)$
- Démontrer algébriquement que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[-1 ; 1]$

### Exercice bonus : (Olympiade STI/STL)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x - 1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x - 1} + 8}$$

- A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de  $f$  (variation et valeur) sur l'intervalle  $[5 ; 10]$ . Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
- Démontrer cette conjecture (on pourra poser  $x = u^2 + 1$  où  $u$  est un réel positif ou nul.