Les fonctions de références

Seconde

Lycée Stendhal

" Le but des mathématiques est de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles. "

Auguste comte (Philosophe Français)

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Ensemble de définition des fonctions de références.			
	Variations des fonctions de références.			
	Signe des fonctions de références.			
	Courbes des fonctionsd e références.			
	Applications aux variations des autres fonctions.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

LES FONCTIONS DE REFERENCES

Lycée Stendhal • Seconde• M Obaton

Contents

1 Fonctions affines

1.1 Définition

Définition 1

Les fonctions affines sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto mx + p$$

avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Exemples :
1) $f : x \mapsto 2x + 3$
2) $f : x \mapsto -2x + 5$

1.2 Signes et variations

► Si $p = 0$ alors on dit que f est **affine linéaire**
► Si $m = 0$ on dit que f est **affine constante**.

Propriété 1

▷ Si $m > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $-\dfrac{p}{m}$, donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

et

x	$-\infty$		$-p/m$		$+\infty$
$mx+p$		$-$	0	$+$	

Propriété 2

▷ Si $m < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $-\dfrac{p}{m}$, donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

et

x	$-\infty$		$-p/m$		$+\infty$
$mx+p$		$+$	0	$-$	

1.3 Courbe des fonctions affines

▷ La courbe représentative d'une fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.

2 Fonctions du second degré

2.1 Définition

Définition 2

Les fonctions du second degré sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exemples :
1) $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 5$
2) $f : x \mapsto 5(x+6)^2 - 8$
3) $f : x \mapsto -2(x+1)(x-8)$
4) $f : x \mapsto (x+3)(2-x) + (3x-5)(4x+2)$
5) $f : x \mapsto x^2$

2.2 Les différentes formes des fonctions polynômes du 2nd degré.

Définition 3

On peut écrire les fonctions du second degré sous trois formes :
La forme **développée** : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$
La forme **canonique** : $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$
La forme **factorisée** : $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$
où a, b, c, α, β, x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$

ATTENTION : La forme factorisée existe si et seulement si a et β ne sont pas de même signe.

Pour obtenir la forme canonique on pourra avoir besoin de la propriété suivante :

Propriété 3

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 - bx = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Démonstration

Exemples :
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3$

Les trois formes donnent des indications sur les variations, l'extremum et la courbe.

2.3 Variations et signes des fonctions polynômes du second degré

Propriété 4

Si $a > 0$ et $\beta < 0$ alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Démonstration :

Propriété 5

Si $a < 0$ et $\beta > 0$ alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Démonstration :

Propriété 6

Si $a > 0$ et $\beta > 0$ alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

Démonstration :

Propriété 7

Si $a < 0$ et $\beta < 0$ alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

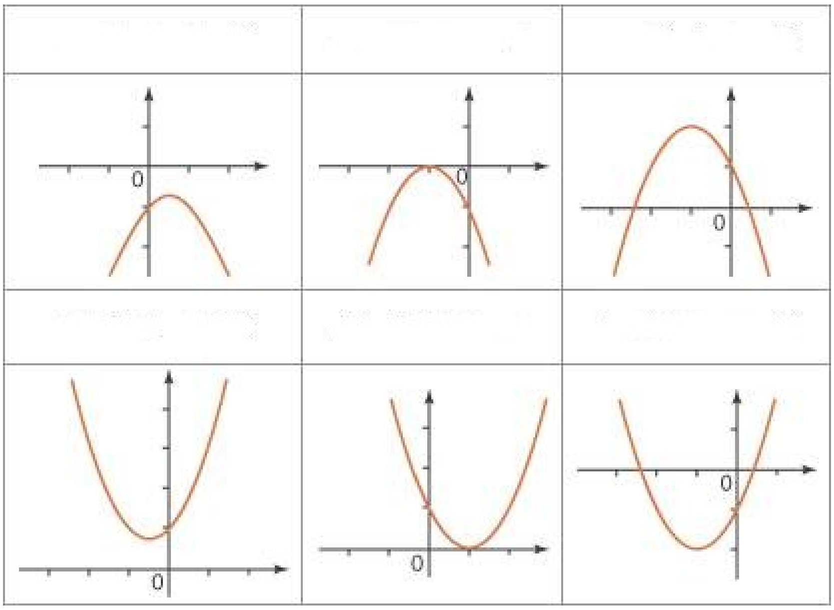
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

Démonstration :

2.4 Courbes des fonctions polynômes du second degré

Propriété 8

La courbe des fonctions du second degré est une parabole tournée vers le haut ou le bas; de sommet $S(\alpha;\beta)$; d'axe de symétrie : la droite verticale passant par $x = \alpha$; coupant l'axe des abscisses en $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ si la forme factorisée existe; et coupant l'axe des ordonnées en $(0; c)$.



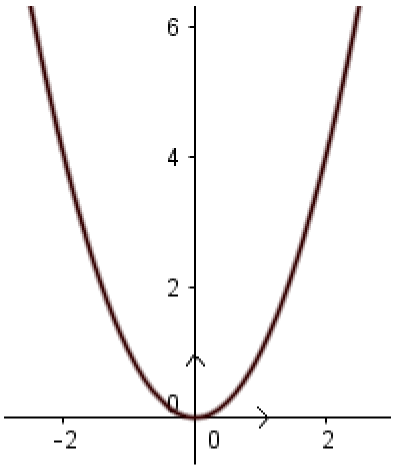
Cas particulier : **La fonction carré** $f : x \mapsto x^2$

$f(x) = x^2 = 1x^2 + 0x + 0 = 1(x-0)^2 + 0 = 1(x-0)(x-0)$ donc c'est en même temps la forme développée, la forme canonique et la forme factorisée. On a donc $a = 1$, $b = c = \alpha = \beta = x_1 = x_2 = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Titre : Représentation graphique de f



3 Fonctions inverses

3.1 Définition

Définition 4

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

3.2 Variations et signes de la fonction inverse

Lorsque x est positif alors $f(x)$ est positif et lorsque x est négatif alors $f(x)$ est négatif.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
On a donc :

Propriété 9

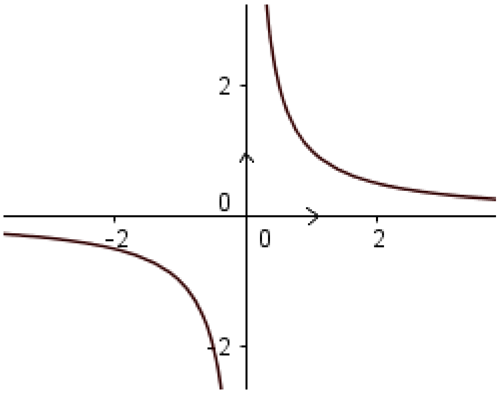
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|$	$+$	

Démonstration :

3.3 Courbe de la fonction inverse

Titre : Représentation graphique de f



4 Applications aux études de variations

Les fonctions de référence, nous donnent une nouvelle méthode pour étudier les fonctions dont les variations sont plus complexes.
Exemple :
Etudions les variations de la fonction $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{x+3}$ sur $]-\infty;-3[$.
Ecriture algorithmique :

$$f : x \mapsto x+3 \mapsto \frac{1}{x+3} \mapsto 4 - \frac{1}{x+3}$$

On utilise trois fonctions de références :

$$x \mapsto x+3 \text{ (affine)}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ (inverse)}$$

$$x \mapsto 4-x \text{ (affine)}$$

On note a et b deux nombres réels tels que $a < b < -3$.

$$a < b < -3$$

la fonction $x \mapsto x+3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$a+3 < b+3 < 0$$

la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ donc

$$\frac{1}{a+3} > \frac{1}{b+3}$$

la fonction $x \mapsto 4-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$4 - \frac{1}{a+3} < 4 - \frac{1}{b+3} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$.