Fct affine, tableaux signes et inéquations

Seconde

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est parce qu'ils ne savent pas à quel point la vie est compliquée "

J.Von Neumann (Mathématicien et physicien américano-hongrois)

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Décrire les variations, les signes et la courbe d'une fonction affine.			
	Dresser le tableau des signes d'un produit.			
	Dresser le tableau des signes d'un quotient.			
	Résoudre une inéquation du premier degré.			
	Dresser une inéquation de degré supérieur à 1.			
	Résoudre un problème avec des inéquations.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

Contents

CH06 : Tableau des signes d'un produit ou quotient

Activité 01 : **Bénéfice d'une entreprise**

Une entreprise fabrique x tonnes d'un produit. Le coût de la production est donné par la fonction $f : x \mapsto 6x^2 + 60$ (en milliers d'euros) et la recette réalisée après la vente des objets est donnée par la fonction $g : x \mapsto 42x$ (en milliers d'euros)

Déterminer pour quelles quantités de production, l'entreprise fait des bénéfices.

Activité 02 : **Signe d'un produit de polynômes du premier degré.**

Partie I : On souhaite trouver le signe de $A(x) = (2x-4)(15-3x)$ suivant les valeurs de la variable x.

1. Etudier la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 4$ (D_f , Variations et signes)
2. Etudier la fonction affine $g : x \mapsto 15 - 3x$ (D_f , Variations et signes)
3. Compléter le tableau des signes ci-dessous :

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x-4$	
$15-3x$	
$A(x) = f(x) \times g(x)$	

4. Sans faire de calcul, répondre aux questions suivantes :
   a. Quel est le signe de $A(0)$, de $A(\pi)$ et de $A\left(10^7\right)$?
   b. Que peut-on dire de $A(2)$ et $A(5)$?
   c. Quelles sont les solutions de $A(x) \geq 0$ puis de $A(x) > 0$?
   d. Quelles sont les solutions de $A(x) \leq 0$ puis de $A(x) < 0$?
   e. Pourquoi cet exercice permet-il de répondre à l'activité 01 ?

Partie II : Par la méthode de votre choix, donner le signe des expressions suivantes

1. $A(x) = (x-3)(x+1)(2-x)$
2. $B(x) = -2(x+1)(10-5x)$
3. $D(x) = 3x(x^2-4)$

Rappels

m et p sont des réels

Fonctions affines

$f : x \mapsto mx + p$

Fonctions affines linéaires

$f : x \mapsto mx$

Fonctions affines constantes

$f : x \mapsto p$

Domaine de définition

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Variations

Si $\boxed{m > 0}$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Si $\boxed{m < 0}$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Si $\boxed{m = 0}$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$

Solution de $f(x) = 0$

$x = -\dfrac{p}{m}$ si $m \neq 0$

1 Les fonctions affines

1.1 Définition

Définition 1

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \longmapsto mx + p$$

où m et p sont des réels constants.

Exemples de fonctions affines :

1. $f : x \longmapsto 2x + 3$
2. $f : x \longmapsto -2x + 3$
3. $f : x \longmapsto 3 - 4x$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{4x - 5}{3}$

Exemple de fonctions non affines :

1. $f : x \longmapsto 2x^2 + 3$
2. $f : x \longmapsto -2x + \dfrac{3}{x}$

1.2 Variations des fonctions affines

Propriété 1

➩ Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
➩ Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
➩ Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Exemples : Dresser les tableau des variations des fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ et $g : x \mapsto -2x+3$

1.3 Signes des fonctions affines

Propriété 2

▷ Si $m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$-$	0	$+$	

▷ Si $m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$+$	0	$-$	

Démonstration ;

1.4 Courbe des fonctiosn affines

la courbe représentative dans un repère, d'une fonction affine $f : x \longmapsto mx + p$ est une droite d'équation réduite $y = mx + p$

2 Les tableaux de signes

2.1 Signe d'un produit de fonctions affines

Pour étudier le signe du produit $P(x) \times Q(x)$, on dresse dans le même tableau, les signes de $P(x)$ et de $Q(x)$ puis on applique la règle des signes pour la multiplication.
Exemple :
On souhaite trouver le signe de $A(x) = (x+2) \times (15-3x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.
▶ $x \mapsto x+2$ s'annule en -2 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ ($-$ vers $+$).
▶ $x \mapsto 15-3x$ s'annule en 5 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ ($+$ vers $-$).

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$(x+2)$			0		⋮		
$(15-3x)$			⋮		0		
$A(x)$			0		0		

Conclusion
▷ $A(x)$ est strictement positive si $x \in]-2;5[$
▷ $A(x)$ est strictement négative si $x \in]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$
▷ $A(x)$ est nulle si $x = -2$ ou $x = 5$

2.2 Signes d'un quotient de fonctions affines

Pour étudier le signe du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on dresse dans le même tableau, les signes de $P(x)$ et de $Q(x)$ puis on applique la règle des signes pour le quotient.
Attention, les valeurs qui annulent le quotient $Q(x)$ sont des valeurs interdites. Les valeurs interdites sont notées par des doubles barres dans les tableaux.
Exemple
On souhaite trouver le signe de $A(x) = \dfrac{(x+2)}{(15-3x)}$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$
▶ $x \mapsto x+2$ s'annule en -2 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ ($-$ vers $+$).
▶ $x \mapsto 15-3x$ s'annule en 5 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ ($+$ vers $-$).
▶ 5 est la seule valeur interdite de $A(x)$.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$(x+2)$			0		⋮		
$(15-3x)$			⋮		0		
$A(x)$			0		‖		

▷ $A(x)$ est strictement positive si $x \in]-2;5[$
▷ $A(x)$ est strictement négative si $x \in]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$
▷ $A(x)$ est nulle si $x = -2$

2.3 Signes d'expression du 2nd degré

En seconde nous pouvons étudier le signe des fonctions polynomiales du second degré de la forme :

- $(x+a)^2$ avec $a \in \mathbb{R}$
- $x^2 + a$ avec $a \in [0; +\infty[$
- $x^2 - a^2$ avec $a \in \mathbb{R}$

Propriété 3

▷ Si $a \in \mathbb{R}$ alors $(x+a)^2$ s'annule en $-a$ et l'expression est toujours positive.

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$(x+a)^2$		0	

Propriété 4

▷ Si $a \in [0; +\infty[$ alors $x^2 + a$ ne s'annule jamais et l'expression est toujours positive.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(x+a)^2$		

Propriété 5

▷ Si $a \in \mathbb{R}$ alors $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ s'annule en $-a$ et a et son signe est celui du produit de $x-a$ par $x+a$.

2.4 Signe d'expression plus complexes

1) $C(x) = (x^2-9)(9-3x)(4-2x)$
► x^2-9 est du second degré mais l'expression se factorise. On commence donc par factoriser le polynôme du second degré avant de commencer.
$C(x) = (x^2-9)(9-3x)(4-2x) = (x-3)(x+3)(9-3x)(4-2x)$
► $x \mapsto x-3$ s'annule en 3 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (− vers +).
► $x \mapsto x+3$ s'annule en −3 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (− vers +).
► $x \mapsto 9-3x$ s'annule en 3 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ (+ vers −).
► $x \mapsto 4-2x$ s'annule en 2 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ (+ vers −).

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
$(x-3)$							0		
$(x+3)$			0						
$(9-3x)$							0		
$(4-2x)$					0				
$C(x)$			0		0		0		

2) $D(x) = \dfrac{5(3x-6)}{4-2x}$
► 5 ne s'annule pas et est toujours positif.
► $x \mapsto 3x-6$ s'annule en 2 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (− vers +).
► $x \mapsto 4-2x$ s'annule en 2 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ (+ vers −).
► 2 est la seule valeur interdite.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
5					
$(3x-6)$			0		
$(4-2x)$			0		
$D(x)$			‖		

3 Résolution des inéquations

3.1 Inéquations du premier degré

Définition

Une inéquation polynomiale du premier degré est une inéquation qui peut toujours se ramener, par des opérations mathématiques, à une inéquation de la forme $ax+b>0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$.

Exemples

▷ $3x-4<0$

▷ $4-5x\geq 2x-3$

▷ $4-5(2x+1)>3(x-1)+2x$

▷ $(3x-1)(3-x)\geq(x-2)(4-3x)$

▷ $(x-3)^2-x^2>0$

Propriété 6

Méthode de résolution des équations polynomiales de degré 1
- Développer les deux membres de l'inéquation.
- Réduire les deux membres de l'inéquation.
- Faire apparaître les termes en x d'un côté et le reste de l'autre.
- Déterminer les valeurs de x.
- Donner l'ensemble des solutions.

Propriété 7

▷ Lorsqu'on multiplie ou divise une inégalité par un nombre négatif, on doit changer le sens de l'inégalité.

Exemple

$4-5(2x+1)>3(x-1)+2x$	Développer les deux membres de l'inéquation.
$\Leftrightarrow 4-10x-5>3x-3+2x$	Réduire les deux membres de l'inéquation.
$\Leftrightarrow -1-10x>5x-3$	Faire apparaître les termes en x d'un côté.
$\Leftrightarrow -10x-5x>-3+1$	Déterminer la valeur de x.
$\Leftrightarrow -15x>-2$	Attention : On va divisier par -15.
$\Leftrightarrow x<\dfrac{-2}{-15}$	
$\Leftrightarrow x<\dfrac{2}{15}$	Donner l'ensemble des solutions.
$S=\left]-\infty;\dfrac{2}{15}\right[$	

3.2 Inéquation de degré supérieur à 1

Définition

Une inéquation polynomiale de degré spérieur à 1 est une inéquation polynomiale qui ne peut pas se ramener, par des opérations mathématiques, à une inéquation de la forme $ax+b>0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$.

Exemples

▷ $3x^2-4<0$

▷ $4-5x^3>2x^2-3$

▷ $(3x-1)(2x+1)<0$

▷ $(3x-1)(3-2x)\leq(x-2)(4-3x)$

▷ $(x-3)^2-16 \geq 0$

Propriété 8

Méthode de résolution des inéquations polynomiales de degré supérieur à 1
• Soustraire les deux membres en utilisant la propriété

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

• Factoriser le membre non nul.
• Réduire la factorisation.
• Dresser le tableau des signes de l'expression.
• Donner l'ensemble des solutions.

Exemple :
On souhaite résoudre l'inéquation $4-5x^3 > 2x^2-3$
$4-5x^3 > 2x^2-3 \Leftrightarrow 4-5x^2-2x^2+3 > 0$
$\Leftrightarrow 7-7x^2 > 0 \Leftrightarrow 7(1-x^2) > 0$
$\Leftrightarrow 7(1-x)(1+x) > 0$
On note $A(x) = 7(1-x)(1+x) > 0$.
► 7 est un nombre positif.
► $x \mapsto 1-x$ s'annule en 1 et elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ (+ vers −).
► $x \mapsto 1+x$ s'annule en −1 et elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (− vers +).

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
7							
$(1-x)$					0		
$(1+x)$			0				
$A(x)$			0		0		

On veut que $A(x)$ soit positif donc $S =]-1;1[$.

3.3 Inéquations rationnelles

Définition
Une inéquation rationnelle est une inéquation comportant des divisions de polynômes, où l'inconnue apparaît au dénominateur.

Exemples
▷ $x < \dfrac{1}{x}$
▷ $1 - \dfrac{2}{x+5} \geq \dfrac{x+3}{x-1}$
▷ $\dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+1} \leq \dfrac{3x}{x^2-x-1}$

Propriété 9

Méthode de résolution des inéquations rationnelles
• Chercher l'ensemble d'étude de l'inéquation.
• Soustraire les deux membres en utilisant la propriété

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

• Mettre l'expression non nulle au même dénominateur.
• Dresser le tableau des signes de l'expression non nulle.
• Donner l'ensemble des solutions.

Exemple
On souhaite résoudre l'inéquation $x \leq \dfrac{1}{x}$.
▷ L'inéquation existe si et seulement si $x \neq 0$ donc $E = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$.

$$x \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0$$

► $x \mapsto x - 1$ s'annule en 1 et elle est croissante (- vers +).
► $x \mapsto x + 1$ s'annule en -1 et elle est croissante (- vers +).
► $x \mapsto x$ s'annule en 0 et elle est croissante (- vers +).

On note $A(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$(x-1)$							0		
$(x+1)$			0						
(x)					0				
$A(x)$			0		‖		0		

On veut que $A(x)$ soit négative ou nulle donc $S =]-\infty; -1] \cup]0; 1]$.