Géométrie analytique

Seconde

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

"Rien n'est plus facile à apprendre que la géométrie pour peu qu'on en ait besoin.."

Sacha Guitry (homme de théâtre et de cinéma)

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
	Calculer la distance entre deux points sur une droite graduée.			
	Calculer la distance entre deux points dans un repère.			
	Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.			
	Résoudre des problèmes de géométrie plane.			
	Tracer une droite dans un plan repéré, connaissant son équation.			
	Déterminer l'équation d'une droite.			
	Déterminer si trois points sont ou ne sont pas alignés.			
	Calculer l'équation d'une droite passant par deux points.			
	Reconnaître des droites parallèles ou sécantes à l'aide de leurs équations.			
	Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre deux droites.			
	Résoudre un système du premier degré à deux inconnues.			
	Résoudre un problème de géométrie faisant intervenir des droites.			

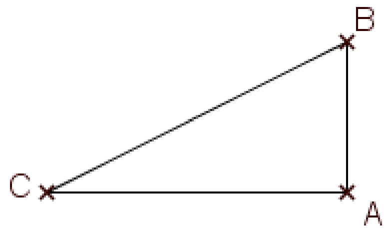
Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

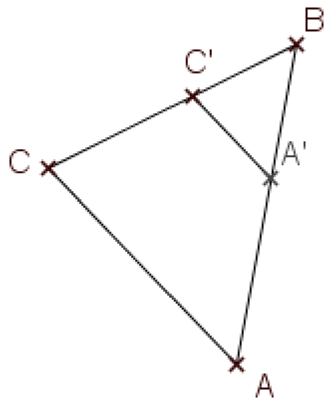
GEOMETRIE ANALYTIQUE

Lycée Stendhal • Seconde • M Obaton

Quelques rappels du collège :



▷ **Théorème de Pythagore** :
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
▷ **Réciproque du théorème de Pythagore** :
Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.
▷ **Contraposée du théorème de Pythagore** :
Si $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.



▷ **Théorème de Thales** :
Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $(CA)//(C'A')$ alors

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{BA'}{BA} = \frac{C'A'}{CA}$$

▷ **Réciproque du théorème de Thales** :
Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $\dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{BA'}{BA}$ alors

$$(C'A')//(CA)$$

▷ **Contraposée du théorème de Thales** :

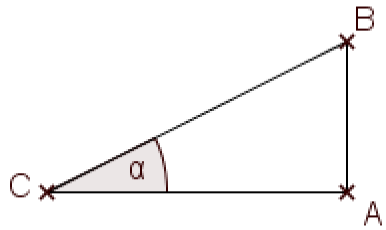
Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $\dfrac{BC'}{BC} \neq \dfrac{BA'}{BA}$ alors (CA) et $(C'A')$ ne sont pas parallèles.

Définition

On dira que $k_r = \dfrac{BC'}{BC}$ est le **coefficient de réduction** pour passer du triangle ABC au triangle $A'BC'$ et que $k_a = \dfrac{BC}{BC'}$ est le **coefficient d'agrandissement** pour passer du triangle $A'BC'$ au triangle ABC.

▷ Si les longueurs d'une figure dans le plan sont multipliées par un réel positif k alors l'aire de la figure est multipliée par k^2.

▷ Si les longueurs d'une figure dans l'espace sont multipliées par un réel positif k alors le volume de la figure est multiplié par k^3.



▷ Si ABC est un triangle rectangle en A alors :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{AC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Moyen mnémotechnique : se souvenir de **SOH CAH TOA**

1 Géométrie analytique

Longueurs et coordonnées du milieu d'un segment

On note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère (O, OI, OJ) du plan.

Propriété 1

▷ Si I est le milieu de $[AB]$ alors les coordonnées de I sont :

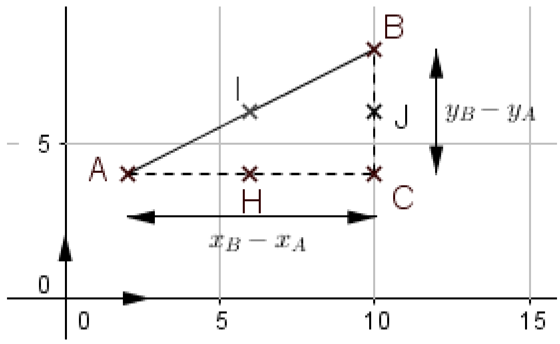
$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

▷ Si le repère est orthonormé alors la longueur AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration :

Titre : Repère du plan.



Définition

On nomme **équation d'un ensemble de points** du plan, une relation algébrique entre les abscisses et les ordonnées des points de cet ensemble.

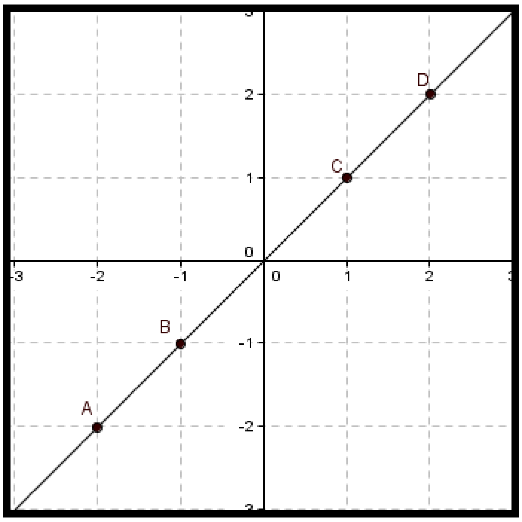
Exemples :

L'équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$, où m est la pente de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

L'équation réduite d'un cercle est de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, où Ω est le centre du cercle et R son rayon.

2 Les équations de droites

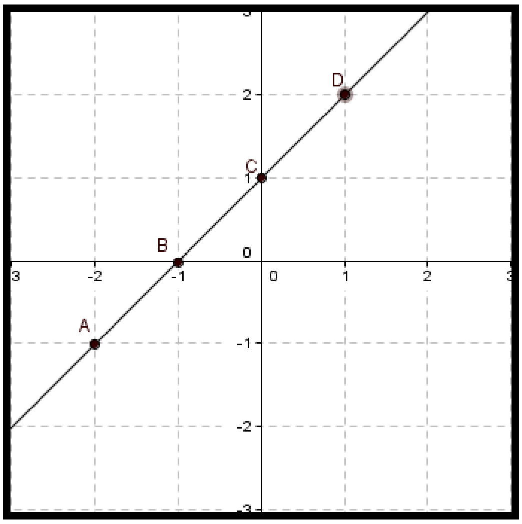
Activité : Relation algébrique entre les abscisses et les ordonnées



1.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				

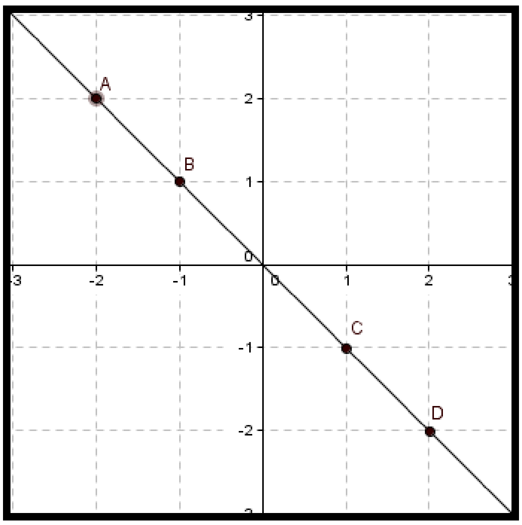
Déterminer une relation algébrique entre y et x



2.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				

Déterminer une relation algébrique entre y et x



3.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				

Déterminer une relation algébrique entre y et x

Vocabulaire

Une équation réduite cartésienne de droite non verticale, est de la forme $y = mx + p$.

m est le **coefficient directeur** ou **la pente** de la droite. On peut l'exprimer sous la forme

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et si on nomme α la mesure de l'angle entre l'axe des abscisses et la droite alors

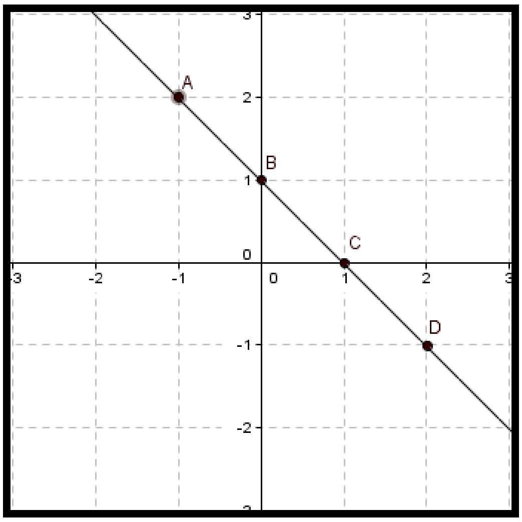
$m = \tan(\alpha)$

p est **l'ordonnée à l'origine**. Il indique que la droite coupe l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0;p)$ et on peut l'obtenir en calculant

$$p = y_A - mx_A$$

où $(x_A ; y_A)$ sont les coordonnées d'un point de la droite.

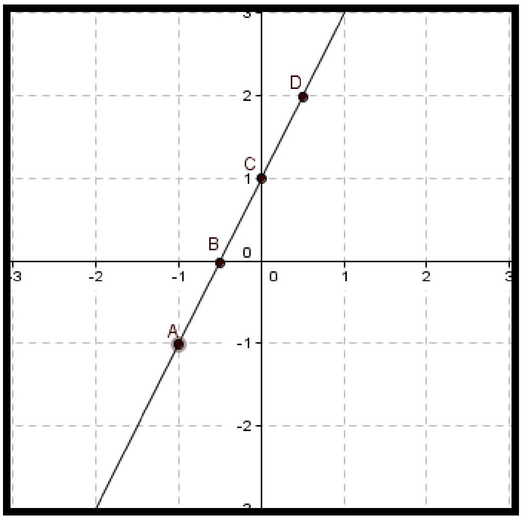
Activité : Relation algébrique entre abscisses et ordonnées



4.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				
y-1				

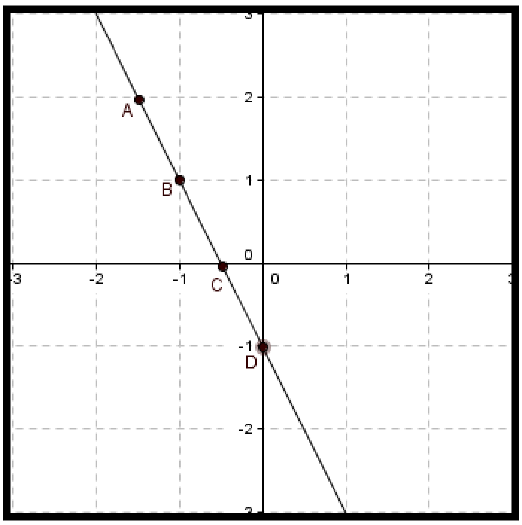
Déterminer une relation algébrique entre y et x



5.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				
y-1				

Déterminer une relation algébrique entre y et x



6.Compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D
x				
y				
y+1				

Déterminer une relation algébrique entre y et x

Vocabulaire

Une équation réduite cartésienne de droite non verticale, est de la forme $y = mx + p$.

m est le **coefficient directeur** ou **la pente** de la droite. On peut l'exprimer sous la forme

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et si on nomme α la mesure de l'angle entre l'axe des abscisses et la droite alors

$$m = \tan(\alpha)$$

p est **l'ordonnée à l'origine**. Il indique que la droite coupe l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0;p)$ et on peut l'obtenir en calculant

$$p = y_A - mx_A$$

où $(x_A;y_A)$ sont les coordonnées d'un point de la droite.

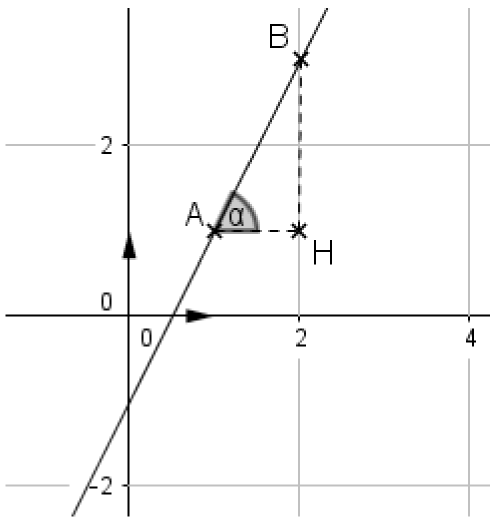
Définition

Une **équation réduite de droite** est une relation algébrique de la forme $y = mx + p$, où $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. Cette relation est vérifiée par les coordonnées de tous les points de la droite. Si les coordonnées d'un point ne vérifient pas cette relation, alors il n'est pas sur cette droite.
Une **équation cartésienne de droite** est une relation algébrique de la forme $ax + by + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Cette relation est vérifiée par les coordonnées de tous les points de la droite. Si les coordonnées d'un point ne vérifient pas cette relation, alors il n'est pas sur cette droite.
Remarque : Une droite admet une seule équation réduite mais une infinité d'équations cartésiennes.
Exemple :
$y = 2x - 3$, $y - 2x + 3 = 0$, $2y - 4x + 6 = 0$, $3y - 6x + 9 = 0$, $-y + 2x - 3 = 0$, etc. représentent la même droite. L'équation réduite (comme la fraction irréductible) est l'écriture la plus simple que l'on puisse obtenir.

Définition

Dans l'équation $y = mx + p$, m représente **la pente** ou **le coefficient directeur** de la droite ou **la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'horizontale**.

Titre : Droite d'équation $y = 2x - 1$

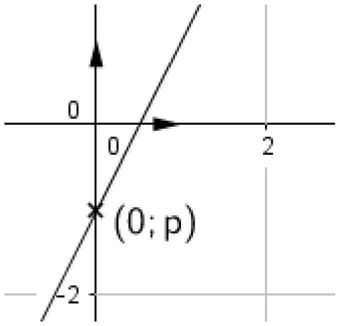


$$m = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \tan\alpha$$

Définition

Dans l'équation $y = mx + p$, p représente **l'ordonnée à l'origine** de la droite. C'est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

Titre : Droite d'équation $y = 2x - 1$



Exemple :

Comment déterminer l'équation réduite d'une droite tracée ?

Pour déterminer l'équation réduite d'une droite tracée, il faut déterminer les valeurs de m et p.

Pour m, on prend deux points sur la droite et on détermine $\Delta X = x_B - x_A$ et $\Delta Y = y_B - y_A$ (voir ci-après).

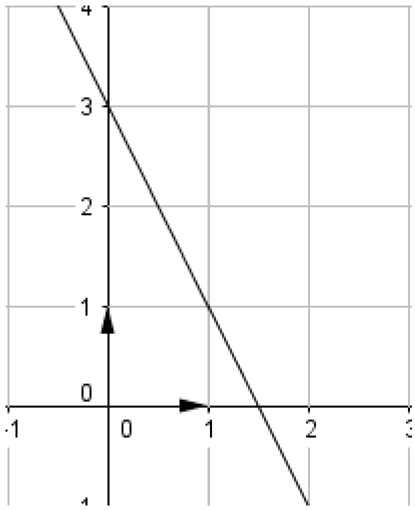
$$m = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

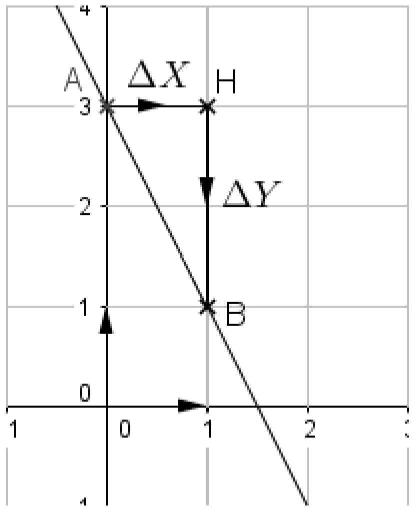
Pour p, soit on peut lire les coordonnées du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées, soit on calcule p à l'aide de la formule

$$p = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

où A est un point quelconque de la droite.

Par exemple :





donc $m = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{-2}{1} = -2$ donc $m = -2$

On peut lire graphiquement que $p = 3$ mais s'il n'est pas possible de trouver graphiquement p alors on peut le calculer :
$p = y_B - mx_B = 1 - (-2) \times 1 = 1 + 2 = 3$ donc $p = 3$
Conclusion : L'équation réduite de la droite tracée est $y = -2x + 3$.

Propriété 2

▷ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si

$$m_{(AB)} = m_{(CD)}$$

▷ Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$m_{(AB)} = m_{(AC)}$$

▷ Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si

$$m_{(AB)} \times m_{(CD)} = -1$$

Exemples :
1) $y = 3x - 1$ et $y = 3x + 5$ sont des équations de droites strictement parallèles.

2) $y = 2x + 1$ et $y = \dfrac{6x+3}{3}$ sont des équations de droites confondues.

3) $y = -3x + 5$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 3$ sont des équations de droites perpendiculaires.

Propriété 3

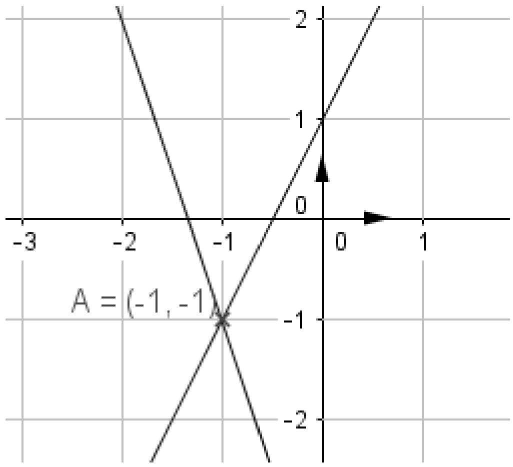
▷ Les droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont sécantes et non parallèles si et seulement si

$$m \neq m'$$

▷ Dans ce cas, les coordonnées de $M(x; y)$ point d'intersection entre les deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, vérifient le système :

$$\begin{cases} y = xm + p \\ y = m'x + p \end{cases}$$

Exemple : les droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = -3x - 4$ sont sécantes et non confondues car $2 \neq -3$ et les coordonnées du point d'intersection de ces droites, vérifient le système :
$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x + 1 = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 \\ x = -1 \end{cases}$
donc les coordonnées du point d'intersection sont $A(-1; -1)$



3 Logiciels de géométrie dynamique

Pour faire de la géométrie dynamique, on peut aussi utiliser Géogebra. Géogebra est un logiciel libre de géométrie dynamique et de calcul formel. Vous pouvez le télécharger gratuitement ou l'utiliser en ligne. Pour le télécharger, vous pouvez utiliser cette adresse :

https://www.geogebra.org/download

On peut faire des figures planes ou des figures dans l'espace.
Il ne faut pas hésiter à cliquer sur les petits triangles de chacune des icônes pour dérouler les menus et voir toutes les possibilités. On ne va pas donner toutes les commandes dans

ce livre car le logiciel est très intuitif et le mode d'emploi est très bien fait. Toutes les images de ce livre, sont réalisées avec ce logiciel.
Fenêtre de géométrie plane :