Les expressions littérales

Classe de seconde

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2016-2017

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Savoir trouver l'ensemble d'étude d'une expression littérale.			
Savoir développer une expression littérale.			
Savoir factoriser une expression littérale.			
Savoir démontrer une formule ou une égalité.			
Savoir résoudre une equation du premier degré			
Savoir résoudre une équation polynôme de degré supérieur à un			
Savoir résoudre une équation rationnelle			
Savoir résoudre un problème utilisant les expressions littérales			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser parfaitement les calculs sur les expressions littérales car dans tous les prochains chapitres, nous allons avoir besoin de manipuler les expressions littérales ou de résoudre des équations ou des inéquations.

2 Développement

2.1 Rappels de cours et méthodes

Développer va nous servir à simplifier et réduire une expression littérale.Lorsqu'il y a une multiplication devant une parenthèse, on distribue la multiplication à tous les termes de la parenthèse. On nomme cette opération **la distributivité**.

Propriété 1

▷ $\boxed{k\times}(a+b) = \boxed{k\times}a+\boxed{k\times}b$

▷ $\boxed{k\times}(a-b) = \boxed{k\times}a-\boxed{k\times}b$

De même lorsqu'il y a un signe − devant une parenthèse, on distribue le signe moins (et donc on change le signe) de **tous** les termes de la parenthèse.

Propriété 2

▷ $-(a+b-c) = -a-b+c$

Lorsque deux parenthèses se multiplient on applique la distributivité autant de fois qu'il y a de termes dans une des parenthèses.

Exemples :

1) Développer $A(x) = (x+2) \times (x-3)$:

2) Développer $B(x) = -3(x+1)(3-x)$:

3) Développer $C(x) = (2x+1)(4-x) - (x-1)(-x-3)$:

Pour développer les expressions de la forme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ou $(a+b)(a-b)$ on utilise les identités remarquables dans le sens du développement.

Propriété 3

▷ Pour tout a et b réels :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemples :
1) Développer $A(x) = (x+3)^2 - (2-x)^2$:

2) Développer $B(x) = (2x-1)^2 - 2(9-x)^2$:

3) Développer $C(x) = (4x-3)(4x+3) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$:

Comment démontrer une égalité en développant?

Propriété 4

Pour démontrer que l'expression littérale A est égale à l'expression littérale B, il y a trois méthodes possibles :

1. On peut développer A pour obtenir B.
2. On peut développer B pour obtenir A.
3. On peut développer les deux expressions séparément pour obtenir la même expression.

Exemples :
1) Montrer que pour a et b deux réels, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $4(x+2)^2 - 100 = 4(x-3)(x+7)$

3 Factorisation avec facteurs communs

3.1 Rappels de cours et méthodes

On utilisera la factorisation dans de nombreux exercices comme pour simplifier des écritures rationnelles, résoudre des équations et des inéquations, simplifier des calculs, trouver le signe d'une différence ou enfin pour étudier l'extremum d'une fonction sur un intervalle.
Il y a deux méthodes pour factoriser une expression littérale. Celle où il y a des termes avec un facteur commun et celle où il y a une identité remarquable dans le sens de la factorisation.
Une expression littérale est formée de plusieurs termes. Il peut y avoir des facteurs communs dans chacun des termes. Lorsque ces facteurs communs existent on factorise en utilisant **la distributivité** dans le sens de la factorisation.

Propriété 5

▷ Pour tout a, b et k réels :

$$\underline{k\times} a + \underline{k\times} b = \underline{k\times}(a+b)$$
$$\underline{k\times} a - \underline{k\times} b = \underline{k\times}(a-b)$$

Un conseil : souligner le facteur commun afin de repérer les termes qui seront dans la parenthèse qui suit la factorisation.
Exemples :
▷ $x^2 + 2x =$

▷ $x^2 + x =$

Factoriser revient en fait à diviser tous les termes par le facteur commun. On peut toujours factoriser par un nombre réel constant, par contre pour factoriser par une variable il faut que celle-ci soit un facteur commun apparent. Dans le cas contraire on risque d'avoir une division par 0. Il faudra dans ce cas donner les conditions pour que cette factorisation soit possible.

Exemples :
Factoriser par 3 l'expression ci-dessous :

$3x + 5 =$

Si $x \neq 0$, factoriser par x l'expression ci-dessous :

$3x + 5 =$

Dans le dernier exemple, la condition $x \neq 0$ est très importante car si $x = 0$ cette factorisation est impossible.

Factoriser :
1) $A(x) = (x+3)(2x-3) - (x+3)(5-x)$

Dans certains cas, le facteur commun est caché et non apparent. Il faut donc commencer par le faire apparaître pour pouvoir continuer la factorisation. On peut dans certaines situations avoir besoin des propriétés suivantes :

Propriété 6

▷ Pour tout a et b réels :

$$-(a-b) = +(-a+b) = +(b-a)$$

$$+(a-b) = -(-a+b) = -(b-a)$$

Exemples :
1) $(x+1)(x-2)-(2-x)(x+3) =$

2) $(x+1)(x-2)-(2x-4)(x+3) =$

Pour factoriser une expression de la forme a^2-b^2, $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$ on utilise les identités remarquables dans le sens de la factorisation.

Propriété 7

▷ Pour tout a et b réels :

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b)$$

Exemples :

1) $4x^2 - 25 =$

2) $4x^2 + 12x + 9 =$

3) $4 - 12x + 9x^2 =$

4) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 =$

Comment démontrer une égalité en factorisant ?
Pour démontrer que l'expression littérale A est égale à l'expression littérale B il y a trois méthodes possibles :

1. On peut factoriser A pour obtenir B.
2. On peut factoriser B pour obtenir A.
3. On peut factoriser les deux expressions séparément pour obtenir la même expression.

Exemple :

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+2)^2 - 25 = (x-3)(x+7)$

4 Résolution des équations

La résolution des équations est un des domaines les plus importants des mathématiques au lycée et dans le supérieur. Vous allez devoir résoudre des équations dans tous les chapitres de première. Leurs domaines d'applications sont très variés et nombreux. Il y a trois grandes catégories d'équations à savoir résoudre en seconde et en première. Les équations polynomiales du premier degré, les équations polynomiales de degré supérieur à 1 et les équations rationnelles. Il est très important de savoir reconnaître les types d'équations car la méthode de résolution sera différente. Nous allons dans ce chapitre devoir utiliser les chapitres précédents car pour les équations polynomiales du premier degré il faut savoir développer, pour celle de degré supérieur à 1 il faut savoir factoriser et pour les équations rationnelles il faut savoir mettre au même dénominateur et développer ou factoriser.

Propriété 8

▷ On dit que deux équations sont équivalentes (et on utilisera le symbole $\Leftrightarrow$) lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Exemples
▷ Les deux équations $2x+4=0$ et $2x=-4$ sont équivalentes.
On écrira $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4$

Propriété 9

▷ Deux équations sont équivalentes si on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en enlevant à chacun des deux membres un même nombre. Ou si on multiplie ou on divise chacun des deux membres ou en factorisant ou développant les expressions littérales d'un ou des deux membres.

Exemples
▷ $2(x+3)-2=0 \Leftrightarrow 2x+6-2=0 \Leftrightarrow 2x+4=0$
▷ $4x+x^2=0 \Leftrightarrow 4\times x+x\times x=0 \Leftrightarrow x(4+x)=0$
Si on ne travaille pas par équivalence on doit vérifier que la (ou les) solution(s) trouvée(s) pour la dernière équation, est bien (sont bien) solution(s) aussi de la première. Il est donc préférable de travailler par équivalence afin d'éviter cette vérification.

Exemple sans équivalence :
Si $2(x+1)-4=0$ alors $2x+2-4=0$ alors $2x-2=0$ alors $2x=2$ donc $x=1$
Vérification : $2(1+1)-4=2\times 2-4=4-4=0$ donc l'équation admet 1 comme solution.
Exemple avec équivalence :
$2(x+1)-4=0 \Leftrightarrow 2x+2-4=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$
donc l'équation admet 1 comme solution.

4.1 Equations polynomiales du premier degré

Définition
Une équation polynomiale du premier degré est une équation qui peut toujours se ramener, par des opérations mathématiques, à une équation de la forme $ax+b=0$.
Exemples
▷ $3x-4=0$
▷ $4-5x=2x-3$
▷ $4-5(2x+1)=3(x-1)+2x$
▷ $(3x-1)(3-x)=(x-2)(4-3x)$
▷ $(x-3)^2-x^2=0$

Propriété 10

▷ Méthode de résolution des équations polynomiales de degré 1

- Développer les deux membres de l'équation.
- Réduire les deux membres de l'équation.
- Faire apparaître les termes en x d'un côté et le reste de l'autre.
- Déterminer la valeur de x.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple
Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $4-5(2x+1)=3(x-1)+2x$

4.2 Equations polynomiales de degré supérieur à 1

$\boxed{\text{Cas Particuliers}}$ **Les équations produit nul**
Une équation produit nul est de la forme $A\times B=0$

Propriété 11

$\triangleright$ $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$
$\triangleright$ $A\times B\neq 0 \Leftrightarrow A\neq 0$ et $B\neq 0$

Les équation du genre $x^2=a$ $(a>0)$

Propriété 12

$\triangleright$ $x^2=a(a>0) \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Définition

Une équation polynomiale de degré spérieur à 1 est une équation polynomiale qui ne peut pas se ramener, par des opérations mathématiques, à une équation de la forme $ax+b=0$.

Exemples

▷ $3x^2-4=0$

▷ $4-5x^3=2x^2-3$

▷ $(3x-1)(2x+1)=0$

▷ $(3x-1)(3-2x)=(x-2)(4-3x)$

▷ $(x-3)^2-16=0$

Propriété 13

▷ Méthode de résolution des équations polynomiales de degré supérieur à 1

• Soustraire les deux membres en utilisant la propriété

$$A=B \Leftrightarrow A-B=0$$

. • Factoriser le membre non nul.

• Réduire la factorisation.

• Appliquer la règle des équations produit nul.

• Donner l'ensemble des solutions.

Exemple

Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^2=(2x+3)^2$

4.3 Equations rationnelles

Définition

Une équation rationnelle est une équation comportant des divisions de polynômes où l'inconnue apparaît au dénominateur.

Exemples

$\triangleright$ $x = \dfrac{1}{x}$

$\triangleright$ $1 - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-1}$

$\triangleright$ $\dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{3x}{x^2-x-1}$

Ensemble d'étude

Propriété 14

$\triangleright$ $\dfrac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$

$\triangleright$ $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\triangleright$ $\dfrac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = B$

Il faut commencer par chercher l'ensemble d'étude de l'équation rationnelle.
On cherche donc pour quelles valeurs de x réelles, l'expression $\dfrac{A}{B}$ existe et donc les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur $B \neq 0$.

Exemple

L'équation $1 - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-1}$ existe si et seulement si $x+5 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$

donc pour $x \neq -5$ et $x \neq 1$.
On va donc résoudre l'équation sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.

Propriété 15

▷ Méthode de résolution des équations rationnelles

- On commence par chercher l'ensemble d'étude de l'équation.
- On réduit les deux membres pour obtenir une égalité de deux expressions rationnelles, en mettant au même dénominateur.
- On effectue la produit en croix : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$
- Résoudre l'équation polynomiale obtenue.

Exemple

On souhaite résoudre l'équation : $1 - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-1}$

L'ensemble d'étude est $E =$.

Résoudre $1 - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-1}$