Les ensembles de nombres

Classe de seconde

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2018-2019

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Savoir reconnaître et utiliser les nombres entiers naturels.			
Savoir reconnaître et utiliser les nombres entiers relatifs.			
Savoir reconnaître et utiliser les nombres décimaux.			
Savoir reconnaître et utiliser les nombres rationnels.			
Savoir reconnaîtres et utiliser les nombres réels.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

0.1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de connaître les notations et les définitions des ensembles de nombres que vous allez rencontrer au lycée. Vous devez reconnaître les différents ensembles de nombres, et maîtriser les opérations courantes comme les additions, les soustractions, les produits et les quotients. Un chapitre court mais important pour la suite.

0.2 Les ensembles de nombres

0.2.1 Définitions

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels :

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs :

Propriété 1

Les nombres entiers naturels sont inclus dans l'ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux :

Propriété 2

Les nombres entiers relatifs et naturels sont inclus dans l'ensemble des décimaux.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels :

Propriété 3

Les nombres entiers relatifs, naturels et les nombres décimaux sont inclus dans l'ensemble des rationnels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

Propriété 4

Les nombres entiers relatifs, naturels,les nombres décimaux et rationnels sont inclus dans l'ensemble des réels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Propriété 5

Un nombre réel que l'on élève au carré, donne toujours un nombre positif ou nul.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ alors } a \times a = a^2 \geq 0$$

Cours : Rappels du collège sur les fractions

Les fractions

Ensemble de nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$

Règles de calcul :
<u>Pour additionner ou soustraire</u>, il faut mettre les fractions au même dénominateur.
Ex :

$$\frac{4}{15}-\frac{2}{21}=\frac{4}{5\times\boxed{3}}-\frac{2}{7\times\boxed{3}}=\frac{4\times7}{15\times7}-\frac{5\times2}{5\times21}=\frac{28}{105}-\frac{10}{105}=\frac{18}{105}=\frac{\cancel{3}\times3\times2}{\cancel{3}\times7\times5}=\frac{6}{35}$$

<u>Pour multiplier</u>, on multiplie simplement les numérateurs et les dénominateurs. On peut simplifier avant d'effectuer la multiplication.
<u>Pour diviser</u>, on transforme la division en multiplication à l'aide de la règle ci-dessous :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\boxed{\frac{x}{y}}}=\frac{a}{b}\times\boxed{\frac{y}{x}}=\frac{ay}{bx}$$

Quelques remarques très importantes :

$\frac{p}{q}=p\times\frac{1}{q}$ Si $\frac{p}{q}=0$ alors $p=0$ Si $\frac{p}{q}=1$ alors $p=q$

$\frac{p}{1}=p$ par contre $\frac{1}{p}$ n'est pas égal à p mais c'est **l'inverse** de p.

$a\times\frac{p}{q}=\frac{a}{1}\times\frac{p}{q}=\frac{ap}{q}$ Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $ad=bc$ (et réciproquement)

Quelques règles simples de calcul mental :

$\frac{p}{2}$ est la moitié de p

$\frac{p}{4}$ est le quart de p ou la moitié de la moitié de p

$\frac{p}{5}$ se calcule en multipliant p par 2 et en reculant la virgule d'un rang (à gauche)

$25\,\%$ de p est le quart de p.(On divise par 2 puis par 2)
50 % de p est la moitié de p. (On divise par 2)
20 % de p est un cinquième de p. (On multiplie par 2 puis on divise par 10)
75% de p est les trois quart de p. (On divise par 2 puis par 2 puis multiplie par 3)

Equations :

Si $(ax=b$ avec $a\neq0)$ alors $x=\frac{b}{a}$

Historique

$\mathbb{N}$

(Entiers Naturels) vient du mot naturale en Italien. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{Z}$:

(Entiers relatifs) vient du mot zahl en allemand. CANTOR Georg (1845-1918)

$\mathbb{D}$

(Décimaux) vient du mot décimaux en Français. Notation française du groupe BOURBAKI en 1970

$\mathbb{Q}$

(Rationnels) vient du mot quotient. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{R}$

(Réels) DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916)

Cours : Rappels du collège sur les puissances

Les puissances

Ensemble de nombres de la forme a^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

n est appelé l'exposant

Règles de calcul :

Pour additionner ou soustraire, il faut avoir le même nombre et le même exposant autrement on doit revenir à une écriture sans exposant.

Ex :

$$2\times10^4+3\times10^4=5\times10^4$$
$$2\times10^3+3\times10^2=2000+300=2300$$

Pour multiplier, on utilise les formules suivantes

$$a^n\times a^p=a^{n+p}$$
$$a^n\times b^n=(ab)^n$$

Pour diviser, on utilise les formules suivantes

$$\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}=a^{n+\text{opposé de } p}$$
$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

Un cas particulier à connaître :

Si $a\geq0$ alors $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

Quelques remarques importantes :

Pour tout nombre a réel non nul, on a $a^0=1$

Pour tout nombre a réel, on a $a^1=a$

Les écritures scientifiques :

L'écriture d'un nombre en écriture scientifique est de la forme :

$$a\times10^n \text{ avec } -10<a<10 \text{ et } n\in\mathbb{Z}$$

Exemples

$3=3\times10^0$ $20=2\times10^1$ $350000=3{,}5\times10^5$ $0{,}00058=5{,}8\times10^{-4}$

Historique

$\mathbb{N}$

(Entiers Naturels) vient du mot naturale en Italien. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{Z}$:

(Entiers relatifs) vient du mot zahl en allemand. CANTOR Georg (1845-1918)

D

(Décimaux) vient du mot décimaux en Français. Notation française du groupe BOURBAKI en 1970

$\mathbb{Q}$

(Rationnels) vient du mot quotient. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{R}$

(Réels) DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916)

Cours : Autres rappels et vocabulaire.

Les racines carrées

Ensemble de nombres de la forme $\sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a} \geq 0$

a est appelé le **radicande** et $\sqrt{\ }$ le **radical**

Règles de calcul :

Les règles les plus importantes sont celles-ci :

1. Si $x^2 = a$ avec $a \geq 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
2. Si $a \geq 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$ et si $a \leq 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$
3. Pour tout réel $a \geq 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Quelques remarques importantes :

1. $\sqrt{a}$ existe si et seulement si $a \geq 0$
2. Si $\sqrt{a} = 0$ alors $a = 0$
3. Si $\sqrt{a} = 1$ alors $a = 1$
4. Si $b \geq 0$ $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = a^2 \times b$

Quelques symboles à connaître

1. Symbole : $x \in A$
   Signification : x appartient à l'ensemble A
2. Symbole : $A = \varnothing = \{\ \}$
   Signification : A est l'ensemble vide.
3. Symbole : $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
   Signification : A est l'ensemble constitué des éléments 0 ;1 ;2 ;3 ;4
4. Symbole : $A = [0; 4]$
   Signification : A est l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 4 avec 0 et 4 compris. On dit que A est une intervalle fermé.
5. Symbole : $A =]0; 4[$
   Signification : A est l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 4 avec 0 et 4 non compris. On dit que A est une intervalle ouvert.
6. Symbole : $A \cap B$
   Signification : L'intersection entre les ensembles A et B. Tous les éléments qui sont dans A et aussi dans B.
7. Symbole : $A \cup B$
   Signification : L'union entre les ensembles A et B. Tous les éléments qui sont dans A ou dans B ou dans $A \cap B$.

Historique

$\mathbb{N}$

(Entiers Naturels) vient du mot naturale en Italien. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{Z}$:

(Entiers relatifs) vient du mot zahl en allemand. CANTOR Georg (1845-1918)

D

(Décimaux) vient du mot décimaux en Français. Notation française du groupe BOURBAKI en 1970

$\mathbb{Q}$

(Rationnels) vient du mot quotient. PEANO Giuseppe (1858-1932)

$\mathbb{R}$

(Réels) DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916)