Exercice 1 :

1. $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
   $308 = 2^2 \times 7 \times 11$
2. $\sqrt{252} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = 6\sqrt{7}$
3. $A = \dfrac{252}{308} - \dfrac{8}{11} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 7 \times 11} - \dfrac{8}{11} = \dfrac{9}{11} - \dfrac{8}{11} = \dfrac{1}{11}$

Exercice 2 :

1. p est un nombre premier plus grand ou égal à 3 donc p est impair.
   On a donc $5p$ qui est impair et donc $5p+1$ et $5p-1$ sont des nombres pairs.
   La moitié d'un nombre pair est un nombre entier donc $\dfrac{5p+1}{2} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{5p-1}{2} \in \mathbb{N}$
2. $\left(\dfrac{5p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5p-1}{2}\right)^2 = \dfrac{25p^2+10p+1}{4} - \dfrac{25p^2-10p+1}{4} = \dfrac{20p}{4} = 5p$
3. $115 = 5 \times 23$ donc on applique la formule précédente avec $p = 23$
   $115 = \left(\dfrac{5\times 23+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5\times 23-1}{2}\right)^2 = 58^2 - 57^2$

Exercice 3 :

1. $B = (5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 - (5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})^2 = (75 - 20\sqrt{21} + 28) - (75 + 20\sqrt{21} + 28) = -40\sqrt{21}$
   $C = \dfrac{1}{9} - \dfrac{9}{2} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{18} - \dfrac{8}{18} = -\dfrac{7}{18}$
   $D = \dfrac{7 \times (10^{-5})^{-1}}{2 \times \times 10^7 \times 10^2} = \dfrac{7 \times 10^5}{2 \times 10^9} = \dfrac{7}{2}.10^{-4} = 3,5.10^{-4} = 0,00035$
2. $|B| = |-40\sqrt{21}| = 40\sqrt{21}$
   $|C| = \left|-\dfrac{7}{18}\right| = \dfrac{7}{18}$
   $E[D] = E[0,00035] = 0$

Exercice 4 :

1. $\alpha^2 = (1-\sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$
   $2\alpha + 2 = 2(1-\sqrt{3}) + 2 = 2 - 2\sqrt{3} + 2 = 4 - 2\sqrt{3}$
   donc on a bien $\alpha^2 = 2\alpha + 2$.
2. $2\alpha^{-1} = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -1-\sqrt{3}$
   $\alpha - 2 = 1 - \sqrt{3} - 2 = -1 - \sqrt{3}$
   donc on a bien $2\alpha^{-1} = \alpha - 2$
3. $\alpha^3 = \alpha^2 \times \alpha = (2\alpha+2)\alpha = 2\alpha^2 + 2\alpha = 2(2\alpha+2) + 2\alpha = 4\alpha + 4 + 2\alpha = 6\alpha + 4$
   $\alpha^4 = \alpha^3 \times \alpha = (6\alpha+4)\alpha = 6\alpha^2 + 4\alpha = 6(2\alpha+2) + 4\alpha = 12\alpha + 12 + 4\alpha = 16\alpha + 12$

Exercice 5 :

1. $AM = CN$ d'après l'énoncé.
   I est le milieu de l'hypoténuse de ABC donc c'est le centre du cercle circonscrit donc $IC = IA$
   ABC est rectangle isocèle en A donc $\widehat{ACB} = 45^\circ$.
   ABC est isocèle en A et I milieu de $[BC]$. Or la médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi la bissectrice donc $\widehat{IAM} = 45^\circ$.
   Conclusion :
   $\begin{cases} AM = CN \\ IC = IA \\ \widehat{ACB} = \widehat{IAM} \end{cases}$ donc d'après l'un des critères d'isométrie, les triangles INC et IAM sont isométriques.
2. Les triangles INC et IAM sont isométriques donc $IN = IM$ et $\widehat{CIN} = \widehat{AIM}$
   Donc le triangle NIM est isocèle en I
   De plus $\widehat{NIM} = \widehat{NIA} + \widehat{AIM} = \widehat{CIA} - \widehat{CIN} + \widehat{AIM} = \widehat{CIA} = 90^\circ$
   donc NIM est rectangle isocèle en I.