Exercice 1 :
Démontrer que les nombres ci-dessous sont des rationnels :

$A = (\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$
or $-1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ donc A est un rationnel.

$B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
or $0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc B est un rationnel.

$C = 3\sqrt{3} - \sqrt{27} = 3\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$
or $0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc C est un rationnel.

Exercice 2 :
Dire et explique, à quel ensemble $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ appartiennent les nombres ci-dessous :

$A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$
A est un nombre entier naturel donc $A \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathbb{D}$, $A \in \mathbb{Q}$ et $A \in \mathbb{R}$.

$B = \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15} - \dfrac{5}{15} = -\dfrac{4}{15}$
B est un nombre rationnel donc $B \in \mathbb{Q}$ et $B \in \mathbb{R}$.

$C = \sqrt{1 + \dfrac{12}{13}} \times \sqrt{1 - \dfrac{12}{13}} = \sqrt{\left(1 + \dfrac{12}{13}\right)\left(1 - \dfrac{12}{13}\right)} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \sqrt{\dfrac{25}{169}} = \dfrac{5}{13}$
donc C est un nombre rationnel donc $C \in \mathbb{Q}$ et $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :
Parmi les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, indiquer le plus petit ensemble qui contient chacun des nombres :

$A = -\sqrt{\dfrac{16}{225}} = -\sqrt{\left(\dfrac{4}{15}\right)^2} = -\dfrac{4}{15}$ donc $A \in \mathbb{Q}$.

$B = (6 - 5\sqrt{7})(6 + 5\sqrt{7}) = 6^2 - (5\sqrt{7})^2 = 36 - 25 \times 7 = 36 - 175 = -139$ donc $B \in \mathbb{Z}$.

$C = \dfrac{2\sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)^2}{50} = \dfrac{2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(1) - 1^2}{50} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{50} = \dfrac{4}{50} = \dfrac{8}{10^2}$ donc $C \in \mathbb{D}$.

Exercice 4 :
Démontrer que les nombres ci-dessous sont des entiers naturels :

$A = \dfrac{(2\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5} - \sqrt{7})^2}{4\sqrt{35}} = \dfrac{[(2\sqrt{5})^2 + 2(2\sqrt{5})(\sqrt{7}) + \sqrt{7}^2] - [(2\sqrt{5})^2 - 2(2\sqrt{5})(\sqrt{7}) + \sqrt{7}^2]}{4\sqrt{35}}$
$A = \dfrac{20 + 4\sqrt{35} + 7 - 20 + 4\sqrt{35} - 7}{4\sqrt{35}} = \dfrac{8\sqrt{35}}{4\sqrt{35}} = 2$ donc $A \in \mathbb{N}$.

$B = \dfrac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \dfrac{4(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$
$B = \dfrac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{-1} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + +4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 0$
donc $B \in \mathbb{N}$.