Exercice 1 :

$A = \dfrac{2}{\sqrt{3}-2} + 5 + 2\sqrt{3} = \dfrac{2(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + 5 + 2\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}+4}{-1} + 5 + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 4 + 5 + 2\sqrt{3} = \boxed{1 \in \mathbb{N}}$

$B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{48}-\sqrt{300}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{4^2\times 3}-\sqrt{10^2\times 3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-10\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \boxed{-\dfrac{3}{2} \in \mathbb{D}}$

$C = \dfrac{7\times 10^{425}\times 15\times 10^{-550}}{5\times 7\times 10^{-15}} = \dfrac{3\times 10^{-125}}{10^{-15}} = \boxed{3.10^{-110} \in \mathbb{D}}$

Exercice 2 :

1. On note $x = 2,00\underline{34}$ donc $1000x = 200,\underline{34}$ donc $100x - x = 198,34$ donc $99x = 198,34$ donc $x = \dfrac{19834}{9900} = \dfrac{9917}{4950}$
   On a donc $z = 1 + \dfrac{9917}{4950} = \dfrac{4950+9917}{4950} = \boxed{\dfrac{14867}{4950}}$
2. On pose $x = 2222222$ et donc on a
   $A = \sqrt{4\times 4444444^2 - 7\times 2222222^2} = \sqrt{4\times(2x)^2 - 7x^2} = \sqrt{16x^2-7x^2} = \sqrt{9x^2} = 3x = \boxed{6666666}$
3. (a) Les diviseurs de 6 sont : $1 - 2 - 3 - 6$
   or $1+2+3+6 = 12 = 2\times 6$ donc 6 est un nombre parfait.
   (b) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{6}+\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{12}{6} = \boxed{2}$
   (c) Les diviseurs de 28 sont : $1 - 2 - 4 - 7 - 14 - 28$
   or $1+2+4+7+14+28 = 28+28 = 56 = 2\times 28$ donc 28 est un nombre parfait.
   (d) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{28} = \dfrac{28+14+7+4+2+1}{28} = \boxed{2}$

Exercice 3 :

1. On obtient $\boxed{a = 3^3\times 5^2\times 11^2}$ et $\boxed{b = 3^2\times 5\times 7\times 11}$
2. $\dfrac{81675}{3465} = \dfrac{3^3\times 5^2\times 11^2}{3^2\times 5\times 7\times 11} = \dfrac{3\times 5\times 11}{7} = \boxed{\dfrac{165}{7}}$
3. $\sqrt{3465} = \sqrt{3^2\times 5\times 7\times 11} = 3\sqrt{5\times 7\times 11} = \boxed{3\sqrt{385}}$
4. $\text{pgcd}(81675; 3465) = 3^2\times 5\times 11 = 495$ donc $\boxed{\text{pgcd}(81675; 3465) = 495}$
5. $\text{ppcm}(81675; 3465) = 3^3\times 5^2\times 7\times 11^2 = 571725$ donc $\boxed{\text{ppcm}(81675; 3465) = 571725}$

Exercice 4 :

1. $\omega^2 = \left(\dfrac{\sqrt{29}-1}{2}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{29}-1)^2}{4} = \dfrac{29-2\sqrt{29}+1}{4} = \dfrac{30-2\sqrt{29}}{4} = \dfrac{2(15-\sqrt{29})}{2\times 2} = \boxed{\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}}$
   et $7 - \omega - = \dfrac{14}{2} - \dfrac{\sqrt{29}-1}{2} = \boxed{\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}}$
   donc on a bien $\boxed{\omega^2 = 7-\omega}$
2. Comme $\omega^2 = 7-\omega$ alors $\omega^3 = \omega\times\omega^2 = \omega(7-\omega) = 7\omega - \omega^2$
   or $\omega^2 = 7-\omega$ donc $\omega^3 = 7\omega - 7 + \omega = 8\omega - 7$
   donc $\boxed{\omega^3 = 8\omega - 7}$
3. $\omega^4 = \omega\times\omega^3$
   or $\omega^3 = 8\omega - 7$ donc $\omega^4 = \omega(8\omega-7) = 8\omega^2 - 7\omega$
   or $\omega^2 = 7-\omega$ donc $\omega^4 = 8(7-\omega) - 7\omega = 56 - 15\omega$
   donc $\boxed{\omega^4 = 56 - 15\omega}$

Exercice 5 :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$(2a+3b)^2-(2a-3b)^2=(4a^2+12ab+9b^2)-(4a^2-12ab+9b^2)=4a^2+12ab+9b^2-4a^2+12ab-9b^2=\boxed{24ab}$
2. D'après la question précédente,
$(14\sqrt{3}+6\sqrt{5})^2-(14\sqrt{3}-6\sqrt{5})^2=24(7\sqrt{3})(2\sqrt{5})=\boxed{336\sqrt{15}}$
3. $504=24\times 21=24(7)(3)=(2\times 7+3\times 3)^2-(2\times 7-3\times 3)^2=\boxed{23^2-5^2}$

Exercice facultatif

Si p un nombre premier supérieur ou égal à 3 alors il est impair donc $3p$ est aussi un nombre impair et donc $3p-1$ est un nombre pair. Comme $3p-1$ est pair alors $\dfrac{3p-1}{2} \in \mathbb{N}$.