Exercice 1 :

1. Déterminons les angles de ABC :
   ➠ $\widehat{BCA}$ est un angle inscrit interceptant l'arc AB et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre interceptant l'arc BA donc $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 30^\circ$. $\boxed{\widehat{BCA} = 30^\circ}$
   ➠ $\widehat{CAB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc CB et $\widehat{COB}$ est un angle au centre interceptant l'arc CB donc $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = 45^\circ$. $\boxed{\widehat{CAB} = 45^\circ}$
   ➠ $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{BCA} = 105^\circ$ donc $\boxed{\widehat{ABC} = 105^\circ}$
2. AOB est un triangle isocèle en O tel que $\widehat{BOA} = 60^\circ$.
   donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180-60}{2} = 60^\circ$ donc OBA est un triangle équilatéral et $\boxed{AB = 2 \text{ cm}}$
   Dans le triangle OBC rectangle en O on peut utiliser le théorème de Pythagore :
   $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $\boxed{BC = 2\sqrt{2} \text{ cm}}$
3. (a) Calculons CH :
   Dans le triangle CBH rectangle en H, on utilise la trigonométrie :
   $Cos(\widehat{BCH}) = \dfrac{CH}{BC}$ donc $Cos(30^\circ) = \dfrac{CH}{2\sqrt{2}}$
   On a donc $CH = 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$ donc $\boxed{CH = \sqrt{6} \text{ cm}}$.
   Calculons AH :
   Dans le triangle ABH rectangle en H, on utilise la trigonométrie :
   $Cos(\widehat{BAH}) = \dfrac{AH}{AB}$ donc $Cos(45^\circ) = \dfrac{AH}{2}$
   On a donc $AH = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ donc $\boxed{AH = \sqrt{2} \text{ cm}}$.
   (b) Le périmètre du triangle ABC est donc :
   $AB + BC + AC = 2 + 2\sqrt{2} + (CH + HA) = 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = \boxed{2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

Exercice 2 :

1. Dans les deux triangles AID et ABC on a :
   ➠ $\widehat{AID} = \widehat{BCA}$ d'après l'énoncé.
   ➠ $\widehat{BAC} = \widehat{IAD}$ car l'angle est commun aux deux triangles.
   Conclusion :
   $\begin{cases} \widehat{AID} = \widehat{BCA} \\ \widehat{BAC} = \widehat{IAD} \end{cases}$ donc d'après la premier critère de similitude, les triangles AID et ABC sont semblables.
2. Comme AID et ABC sont semblables alors $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{ID}{BC} = \dfrac{AI}{AC}$
   donc $\dfrac{AD}{28} = \dfrac{ID}{39} = \dfrac{14}{42}$
   Calculon s AD :
   On a $\dfrac{AD}{28} = \dfrac{14}{42}$ donc $AD = \dfrac{28 \times 14}{42} = \dfrac{4 \times 7 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \dfrac{28}{3}$ donc $\boxed{AD = \dfrac{28}{3}}$
   Calculon s ID :
   On a $\dfrac{ID}{39} = \dfrac{14}{42}$ donc $ID = \dfrac{239 \times 14}{42} = \dfrac{3 \times 13 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = 13$ donc $\boxed{ID = 13}$
3. On a $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\frac{28}{3}}{28} = \dfrac{1}{3}$ qui est le coeffcient de réduction pour passer de ABC à AID.
   donc $\dfrac{Aire_{AID}}{Aire_{ABC}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \boxed{\dfrac{1}{9}}$

Exercice 3 :

On note $A = 3 + \dfrac{4x-5}{2x+3} - \dfrac{1}{10-2x}$ et $B = \dfrac{3x-2}{4x-40} + \sqrt{14-2x}$

1. A existe si et seulement si $2x + 3 \neq 0$ et $10 - 2x \neq 0$
   ➠ $2x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -3 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{3}{2}$
   ➠ $10 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow -2x \neq -10 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{10}{2} \Leftrightarrow x \neq 5$

donc l'ensemble d'étude de A est $\boxed{E_A = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2};5\right\}}$

2. B existe si et seulement si $4x-40 \neq 0$ et $14-2x \geq 0$
   ➠ $4x-40 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 40 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{40}{4} \Leftrightarrow x \neq 10$
   ➠ $14-2x \geq 0 \Leftrightarrow 14 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \dfrac{14}{2} \Leftrightarrow x \leq 7$
   or $10 > 7$ donc $\boxed{E_B =]-\infty;7]}$
3. $0 \in E_A$ donc on peut calculer A pour $x=0$
   $A = 3 - \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{90-50-3}{30} = \dfrac{37}{30}$
   5 n'appartient pas à E_A donc on ne peut pas calculer A pour $x=5$.
4. $0 \in E_B$ donc on peut calculer B pour $x=0$
   $B = \dfrac{2}{40} + \sqrt{14} = \dfrac{1}{20} + \sqrt{14}$
   8 n'appartient pas à E_B donc on ne peut pas calculer B pour $x=8$.

Exercice 4 :

On note p un nombre premier supérieur ou égal à 3 et $N = \left(\dfrac{5p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5p-1}{2}\right)^2$

1. p un nombre premier supérieur ou égal à 3 donc il est impair.
   Donc $5p$ est impair et $5p+1$ et $5p-1$ sont donc pairs.
   S'ils sont pairs alors si on les divise par,2 on obtient un nombre entier.
   donc $\dfrac{5p+1}{2} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{5p-1}{2} \in \mathbb{N}$
2. $N = \left(\dfrac{5p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5p-1}{2}\right)^2 = \dfrac{25p^2+10p+1}{4} - \dfrac{25p^2-10p+1}{4} = \dfrac{20p}{4} = 5p$
3. (Facultatif)
   Si $N = 35 = 7 \times 5$ donc on peut prendre $p = 7$
   $N = \left(\dfrac{5\times 7+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5 \times 7-1}{2}\right)^2 = 18^2 - 17^2$