La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir

Exercice 1 :

1. Déterminons les angles de ABC :
   $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{BA}$ et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{BA}$ donc $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 45°$. $\boxed{\widehat{ACB} = 45°}$
   $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{BC}$ et $\widehat{BOC}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{BC}$ donc $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60°$. $\boxed{\widehat{BAC} = 60°}$
   $ABC = 180 - BAC - ACB = 180 - 45 - 60 = 75°$ donc $\boxed{\widehat{ABC} = 75°}$
2. Calculons BA :
   Dans le triangle BOA rectangle en O, on utilise la trigonométrie :
   $Cos(\widehat{BAO}) = \frac{OA}{BA}$ donc $Cos(45°) = \frac{1}{BA}$
   On a donc $BA = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ donc $\boxed{AB = \sqrt{2}}$.
   Calculons BH :
   Dans le triangle BOH rectangle en H, on utilise la trigonométrie :
   $Sin(\widehat{BAH}) = \frac{BH}{BO}$ donc $Sin(60°) = \frac{BH}{1}$
   On a donc $BH = Sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{BH = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.
3. $BC = 2 \times BH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ donc $\boxed{BC = \sqrt{3}}$
4. Calculons KC :
   Dans le triangle BKC rectangle en K, on utilise la trigonométrie :
   $Cos(\widehat{BCK}) = \frac{CK}{BC}$ donc $Cos(45°) = \frac{CK}{\sqrt{3}}$
   On a donc $CK = \sqrt{3} \times Cos(45°) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ donc $\boxed{CK = \frac{\sqrt{6}}{2}}$.
   Calculons AK :
   Dans le triangle BAK rectangle en K, on utilise la trigonométrie :
   $Cos(\widehat{BAK}) = \frac{AK}{AB}$ donc $Cos(60°) = \frac{AK}{\sqrt{2}}$
   On a donc $AK = \sqrt{2} \times Cos(60°) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{AK = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
   Or $AC = AK + CK = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$
   donc $\boxed{AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)}$.

Exercice 2 :

1. Montrons que le triangle AMD est isocèle :
   ➠ Comme (AM) est la bissectrice de $\widehat{DAB}$ alors $\widehat{DAM} = \widehat{MAB}$.
   De plus $(AB)//(DM)$ et $\widehat{MAB}$ et $\widehat{AMD}$ sont des angles alternes-internes donc $\widehat{DMA} = \widehat{MAB}$
   Conclusion : $\widehat{MAD} = \widehat{AMD}$ et MAD est isocèle en D.
   Montrons que les triangles AMD et ABN sont semblables :
   ➠ On sait que $\widehat{DAM} = \widehat{NAB}$ car (AN) est la bissectrice de DAB
   De plus $\widehat{ADM} = \widehat{ABN}$ car $ABCD$ est un parallélogramme donc ses angles opposés sont égaux.
   Conclusion :
   $\begin{cases} \widehat{DAM} = \widehat{NAB} \\ \widehat{ADM} = \widehat{ABN} \end{cases}$ donc d'après la premier critère de similitude, les triangles ADM et ABN sont semblables.
   Montrons que le triangle ABN est isocèle :
   ➠ ABN et ADM sont de la même forme et comme AMD est isocèle en D alors ABN est isocèle en B.

2. On a $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{5} = 0,6$ est la coefficient de réduction pour passer de ABN à ADM.
   donc $\boxed{\dfrac{Aire_{ADM}}{Aire_{ABN}} = (0,6)^2 = 0,36}$

Exercice 3 :

On note $A = 3 + \dfrac{4x-5}{5-10x} \times \dfrac{1}{7+9x}$ et $B = \dfrac{3x-2}{\sqrt{12-6x}} + 2x + 3$

1. A existe si et seulement si $5 - 10x \neq 0$ et $7 + 9x \neq 0$
   ➠ $5 - 10x \neq 0 \Leftrightarrow -10x \neq -5 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{5}{10} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$
   ➠ $7 + 9x \neq 0 \Leftrightarrow 9x \neq -7 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{7}{9}$
   donc l'ensemble d'étude de A est $\boxed{E_A = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{9}; \dfrac{1}{2}\right\}}$
2. B existe si et seulement si $12 - 6x \geq 0$ et $12 - 6x \neq 0$ donc $12 - 6x > 0$
   Or $12 - 6x > 0 \Leftrightarrow 12 > 6x \Leftrightarrow x < \dfrac{12}{6} \Leftrightarrow x < 2$
   donc l'ensemble d'étude de B est $\boxed{E_B =]-\infty; 2[}$
3. $0 \in\ E_A$ donc on peut calculer A pour $x = 0$:
   $A = 3 - \dfrac{5}{5} \times \dfrac{1}{7} = 3 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{20}{7}$
   $0,5$ n'appartient pas à E_A donc on ne peut pas calculer A pour $x = 0,5$.
4. $0 \in E_B$ donc on peut calculer B pour $x = 0$
   $B = -\dfrac{2}{\sqrt{12}} + 3 = -\dfrac{2}{2\sqrt{3}} + 3 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 3 = \dfrac{-\sqrt{3}+9}{3}$
   10 n'appartient pas à E_B donc on ne peut pas calculer B pour $x = 10$.

Exercice 4 :

On note p un nombre premier supérieur ou égal à 3 et $N = \left(\dfrac{7p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7p-1}{2}\right)^2$

1. p un nombre premier supérieur ou égal à 3 donc il est impair.
   Donc $7p$ est impair et $7p+1$ et $7p-1$ sont donc pairs.
   S'ils sont pairs alors si on les divise par,2 on obtient un nombre entier.
   donc $\dfrac{7p+1}{2} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{7p-1}{2} \in \mathbb{N}$
2. $N = \left(\dfrac{7p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7p-1}{2}\right)^2 = \dfrac{49p^2+14p+1}{4} - \dfrac{49p^2-14p+1}{4} = \dfrac{28p}{4} = 7p$
3. (Facultatif)
   Si $N = 35 = 7 \times 5$ donc on peut prendre $p = 5$
   $N = \left(\dfrac{7\times 5+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7\times 5-1}{2}\right)^2 = 18^2 - 17^2$