Exercice 01 :
On note a et b deux nombres entiers.

1. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et pour tout $b \in \mathbb{Z}$:
   $(3a+b)^2 - (3a-b)^2$
   $= \left((3a)^2 + 2(3a)(b) + b^2\right) - \left((3a)^2 - 2(3a)(b) + b^2\right)$
   $= 9a^2 + 6ab + b^2 - 9a^2 + 6ab - b^2$
   $= \boxed{12ab}$.

2. $A = (3\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$
   On applique la formule précédente avec $a = \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{3}$, donc :
   $A = (3\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \boxed{12\sqrt{15}}$.

3. On note n un nombre entier multiple de 12.
   Alors il existe un entier k tel que $n = 12k$.
   On peut toujours trouver un produit de deux entiers a et b tels que $k = ab$ donc $n = 12ab$.
   D'après la première question $n = 12ab = (3a+b)^2 - (3a-b)^2$.

4. $420 = 12 \times 35 = 12 \times 5 \times 7$
   On applique donc la formule du 1) avec $a = 5$ et $b = 7$.
   $420 = (3 \times 5 + 7)^2 - (3 \times 5 - 7)^2 = \boxed{22^2 - 8^2}$.

Exercice 02 :
On note $X = 437856780^2 - 437856770^2$ et $\alpha = 437856775$

1. $X = (437856775 + 5)^2 - (437856775 - 5)^2 = \boxed{(\alpha+5)^2 - (\alpha-5)^2}$.

2. $X = \alpha^2 + 10\alpha + 25 - \alpha^2 + 10\alpha - 25 = 20\alpha = \boxed{8757135500}$.

Exercice 03 :
On note $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

1. $\lambda^2 = \left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \dfrac{9+6\sqrt{13}+13}{4} = \dfrac{22+6\sqrt{13}}{4} = \dfrac{2(11+3\sqrt{13})}{2\times 2} = \dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}$
   $3\lambda + 1 = 3\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + 1 = \dfrac{9+3\sqrt{13}}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}$
   donc $\boxed{\lambda^2 = 3\lambda + 1}$.

2. On sait que $\lambda^2 = 3\lambda + 1$ et on peut multiplier l'égalité par λ
   donc $\lambda^2 \times \lambda = (3\lambda+1)\lambda = 3\lambda^2 + \lambda$
   Or $\lambda^2 = 3\lambda + 1$ donc :
   $\lambda^3 = 3(3\lambda+1) + \lambda = 9\lambda + 3 + \lambda = 10\lambda + 3$
   donc $\boxed{\lambda^3 = 10\lambda + 3}$

3. On sait que $\lambda^2 = 3\lambda + 1$ et que $\lambda \neq 0$ donc on peut diviser l'égalité par λ et on obtient :
   $\dfrac{\lambda^2}{\lambda} = \dfrac{3\lambda+1}{\lambda}$
   donc $\lambda = \dfrac{3\lambda}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} = 3 + \lambda^{-1}$
   donc $\boxed{\lambda^{-1} = \lambda - 3}$