Correction
Devoir commun de seconde

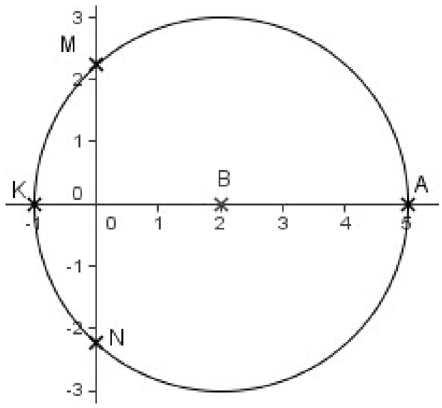
Mathématiques

La qualité de la **rédaction**, le **soin** de la copie, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.
La calculatrice est autorisée pour ce devoir

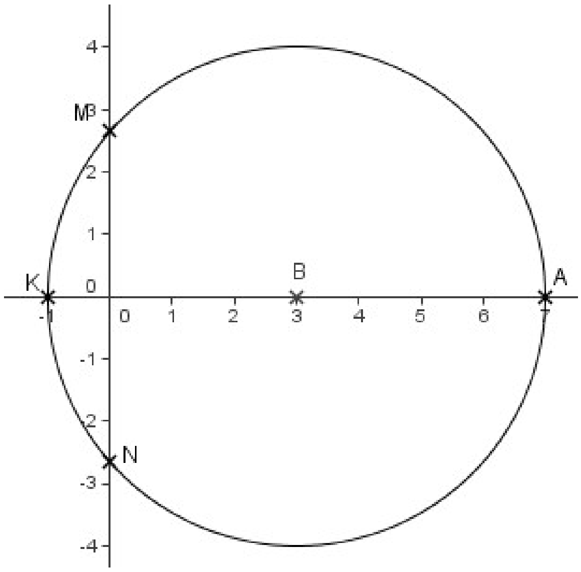
Exercice 1 :

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre B et de rayon 3 cm.
$[KA]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
On note O le point de $[KA]$ tel que $KO = 1$ cm.
La perpendiculaire à (KA) passant par O coupe $\mathcal{C}$ aux points M et N
On admettra que $OM = ON$.

1. Figure de l'exercice :



2. $\widehat{KMN}$ et $\widehat{KAN}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ et qui interceptent le même arc $\widehat{KN}$ donc $\boxed{\widehat{KMN} = \widehat{KAN}}$
3. On sait que $(AK) \perp (MN)$ et que O est le milieu de $[MN]$ donc (AK) est la médiatrice de $[MN]$.
   Comme A est sur la médiatrice de $[MN]$ alors AMN est un triangle isocèle en A et (AK) est aussi la bissectrice de $\widehat{MAN}$.
   On a donc $\widehat{MAK} = \widehat{KAN}$
   De plus d'après la question précédente, $\widehat{KMO} = \widehat{KAN}$ donc $\boxed{\widehat{KMO} = \widehat{MAK}}$
4. Les deux triangles OKM et OAM sont rectangle en O donc $\boxed{\widehat{KOM} = \widehat{MOA}}$
   D'après les deux questions précédentes, on a : $\begin{cases} \widehat{KOM} = \widehat{MOA} \\ \widehat{KMO} = \widehat{MAK} \end{cases}$
   d'après l'un des critères de similitude, dans deux triangles si deux angles de l'un ont les mêmes mesures que deux angles de l'autre alors ils sont semblables, donc AOM et KOM sont semblables et leurs sommets homologues sont :
   $$A \longrightarrow M \ / \ O \longrightarrow O \ / \ M \longrightarrow K.$$
5. Les triangles AOM et KOM sont semblables donc : $\boxed{\dfrac{KM}{MA} = \dfrac{KO}{OM} = \dfrac{OM}{OA}}$.
6. D'après la question précédente, on a $\dfrac{KO}{OM} = \dfrac{OM}{OA}$ donc par produit en croix, on obtient :
   $OM^2 = AO \times KO = (6-1) \times 1 = 5$ donc $OM = \sqrt{5}$ ou $OM = -\sqrt{5}$
   mais comme OM est une longueur alors $\boxed{OM = \sqrt{5}}$
7. Figure de l'exercice :



Exercice 2 :

1. $1,4.10^{-18} = 140.10^{-2} \times 10^{-18} = 140.10^{-20}$ (Réponse a)
2. $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{3}{\pi} = \dfrac{3}{2}$ (Réponse a)
3. $\dfrac{2^3 \times 15^2}{12^4} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{3^4 \times 4^4} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{3^4 \times 2^8} = 2^{-5} \times 3^{-2} \times 5^2$ (Réponse c)
4. $308 = 2^2 \times 7^1 \times 11$ (Réponse a)
5. $\dfrac{2 \times 2 - 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2 - \sqrt{2}$ (Réponse b)
6. $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = 4\sqrt{5}$ (Réponse c)
7. $PGCD\left(2^7 \times 3^{10} \times 5^3 ; 2^7 \times 3 \times 7^{15}\right) = 2^7 \times 3$ (Réponse c)

Exercice 3 :

(E_1) **:** Résoudre $\dfrac{2x+3}{2} - \dfrac{x-5}{4} = 1$

L'ensemble d'étude est $E = \mathbb{R}$

$(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{2} - \dfrac{x-5}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4x+6}{4} - \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{4}{4}$

$\Leftrightarrow 4x + 6 - (x-5) = 4 \Leftrightarrow 4x + 6 - x + 5 = 4 \Leftrightarrow 3x + 11 = 4$

$\Leftrightarrow 3x = -7 \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{3}$

Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{7}{3}\right\}$

(I_2) **:** Résoudre $A(x) = \dfrac{\frac{1}{2} - 2x}{x-2} \leq 0$

L'ensemble d'étude est $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Cherchons les valeurs qui annulent le produit des facteurs :

$\triangleright$ $\dfrac{1}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

$\triangleright$ $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Dressons le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		$1/4$		2		$+\infty$
$0,5-2x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc l'ensemble des solutions est $S = \left]-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup]2; +\infty[$

(E_3) **:** Résoudre $(3x-1)^2 = 3x-1$

L'ensemble d'étude est $E = \mathbb{R}$

$(3x-1)^2 = 3x-1 \Leftrightarrow (3x-1)^2 - (3x-1) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)[(3x-1)-1]$

$\Leftrightarrow (3x-1)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow 3x-1 = 0$ ou $3x-2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$

Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

(I_4) **:** Résoudre $3x(x-1) < x^2 - 1$

L'ensemble d'étude est $E = \mathbb{R}$

$3x(x-1) < x^2 - 1 \Leftrightarrow 3x(x-1) - (x^2-1) < 0 \Leftrightarrow 3x(x-1) - (x+1)(x-1) < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[3x-(x+1)] < 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) < 0$

Cherchons les valeurs qui annulent le produit :

$\triangleright$ $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\triangleright$ $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Dressons le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions est $S = \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

Exercice 4 :

Soient f et g les fonctions dont on donne ci-dessous les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = [-2; 12]$
2. L'image de 0 par la fonction f est 2.
3. $f(7) = 5$.
4. Les antécédents de 2 par la fonction g sont 0 et 5.
5. Le minimum de g sur l'intervalle $[-2; 12]$ est -4 et est atteint pour l'abscisse $x = 9$.
6. Si $x \in 0; 8]$ alors $f(x) \in [-4; 5]$.
7. La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-2; 2]$, strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 9]$ puis strictement croissante sur l'intervalle $[9; 12]$.
8. Dressons le tableau des variations de la fonction f :

x	-2		2		7		12
$f(x)$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	2

9. Dressons le tableau des signes de f :

x	-2		1		4		12
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

10. Résoudre graphiquement :

    (a) Les solutions de $f(x) = 0$ sont $S = \{1; 4\}$

    (b) Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont $S = \{0; 5\}$

    (c) Les solutions de $f(x) \leq 4$ sont $S = [-2; 6] \cup [8; 12]$

    (d) Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont $S =]0; 5[$

Exercice 5 :

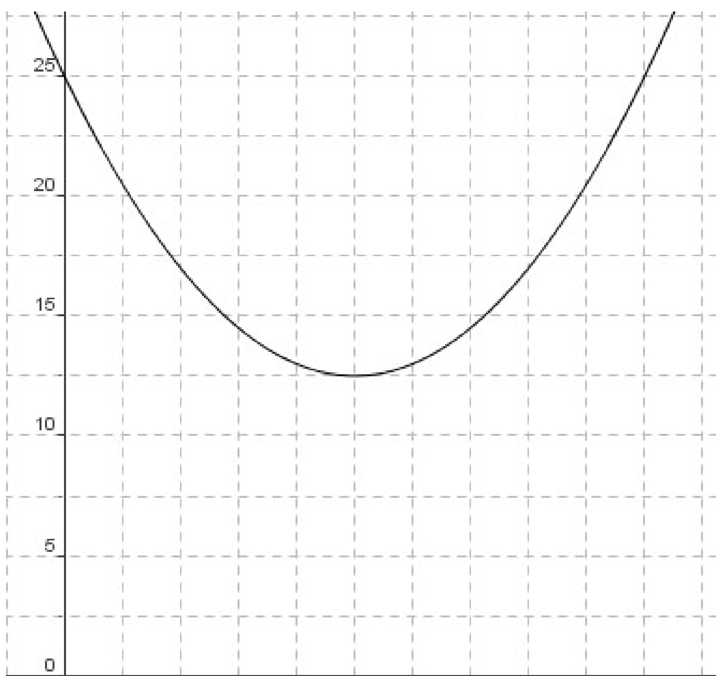
1. x représente une longueur donc $0 \leq x$.
   De plus le côté [BC]du carré mesure 5 et M est un point appartenant au segment [BC],
   donc $BM \leq 5 \Longleftrightarrow x \leq 5$.
   En résumé : $0 \leq x \leq 5$ d'où l'ensemble I des valeurs possibles de x est $[0;5]$
2. Par la suite, x désigne un réel appartenant à I.
   (a) Q appartient au segment $[AD]$ donc $AQ + QD = AD \Longleftrightarrow AQ + x = 5 \Longleftrightarrow AQ = 5 - x$.
   (b) l'aire du triangle ALQ est égale à $\frac{1}{2}AQ \times AL = \frac{1}{2}(5-x)x$
   (c) L'aire $f(x)$ du quadrilatère LMPQ s'obtient en enlevant 4 fois l'aire du triangle AQL à l'aire du carré ABCD.
   $f(x) = 5^2 - 4 \times \frac{1}{2}(5-x)x = 25 - 2(5-x)x = 2x^2 - 10x + 25$
   (d) Première méthode :
   $f(x) = 2(x^2 - 5x + \frac{25}{2})$
   Or $(x - \frac{5}{2})^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} \Longleftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} = x^2 - 5x$
   d'où $f(x) = 2[(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + \frac{25}{2}] = 2[(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}] = 2(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{2}$.
   Deuxième méthode :
   $2(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{2} = 2(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + \frac{25}{2}$

$= 2x^2 - 10x + \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 2x^2 - 10x + 25$

3. (a) tableau des valeurs, ci-dessous :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	25	20,5	17	14,5	13	12,5	13	14,5	17	20,5	25

   (b) la courbe représentative de f (unités : 2 cm pour 1 en abscisses et 0,5 cm pour 1 en ordonnées)est tracée à la fin de la question.



   (c) la valeur de x pour laquelle l'aire de $LMPQ$ semble minimale est 2,5 et une valeur approchée de l'aire minimale de $LMPQ$ est 12,5.

4. (a) $f(x) = 2(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{2}$, donc $f(\frac{5}{2}) = 2 \times 0^2 + \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$.
   Pour tout x dans I, $f(x) - f(\frac{5}{2}) = 2(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 2(x - \frac{5}{2})^2$.

   (b) Pour tout x dans I, $2(x - \frac{5}{2})^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif ou nul. Donc $f(x) - f(\frac{5}{2}) \geq 0$
   $f(x) - f(\frac{5}{2}) \geq 0 \Longleftrightarrow f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.

   (c) $f(\frac{5}{2})$ est donc un minimum pour la fonction. Nous avons déjà calculé $f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{2}$
   Le minimum est atteint pour $x = \frac{5}{2}$.