- Partie 1 : On suppose que $r = 0$ et $R = x$

1. $P_0(x) = \left(\frac{6}{x}\right)^2 \times x = \frac{36}{x^2} \times x = \frac{36}{x}$
2. On nomme x_1 et x_2 deux nombres de $]0; 30]$ tels que $x_1 < x_2$.
   $P_0(x_1) - P_0(x_2) = \frac{36}{x_1} - \frac{36}{x_2} = \frac{36x_2 - 36x_1}{x_1x_2} = \frac{36(x_2 - x_1)}{x_1x_2}$
   Signe de $x_2 - x_1$:
   On sait que $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$ (positif)
   Signe de x_1x_2 :
   On sait que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ alors $x_1x_2 > 0$ (positif)
   On a donc $P_0(x_1) - P_0(x_2) > 0$ et $P_0(x_1) > P_0(x_2)$
   P_0 est donc une fonction strictement décroissante sur $]0; 30]$.
3. Il n'y a pas de maximum pour P_0 car elle n'est pas définie en 0.
4. La puissance absorbée P_0 minimale sur $]0; 30]$ est $P_0(30) = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$
   car P_0 est décroissante sur $]0; 30]$.
5. Il faut résoudre $P_0(x) < 6$
   $P_0(x) < 6 \Leftrightarrow \frac{36}{x} < 6 \Leftrightarrow \frac{6}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 6$
   Donc P_0 est inférieurs à 6 watts si R est supérieur à 6 Ohms.

- Partie 2 : On suppose que $r = 2$ et $R = x$

1. $P_2(x)$ existe si et seulement si $R + r \neq 0 \Leftrightarrow x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$
   De plus $P_2(x) = \left(\frac{6}{x+2}\right)^2 \times x = \frac{36x}{(x+2)^2}$
2. $P_2(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{36x}{(x+2)^2} = \frac{9}{2}$
   par produit en croix, on obtient :
   $72x = 9(x+2)^2 \Leftrightarrow 72x = 9x^2 + 36x + 36 \Leftrightarrow 9x^2 - 36x + 36 = 0$
   $\Leftrightarrow (3x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Donc l'ensemble des solutions est $S = \{2\}$.
3. Pour tout $x \in]0; 30]$
   $P_2(x) - \frac{9}{2} = \frac{36x}{(x+2)^2} - \frac{9}{2} = \frac{72x - 9(x+2)^2}{2(x+2)^2}$
   donc
   $P_2(x) - \frac{9}{2} = \frac{72x - 9x^2 - 36x - 36}{2(x+2)^2} = \frac{-9x^2 + 36x - 36}{2(x+2)^2} = \frac{-9(x^2 - 4x + 4)}{2(x+2)^2} = -\frac{9(x-2)^2}{2(x+2)^2}$
4. Comme $P_2(x) - \frac{9}{2} = -\frac{9(x-2)^2}{2(x+2)^2}$, qu'un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{9}{2} = P_2(2)$
   alors $P_2(x) - P_2(2) < 0$ donc
   pour tout $x \in]0; 30]$ on a $P_2(x) < P_2(2)$
   $P_2(2) = \frac{9}{2} = 4.5$ Watts est donc la puissance maximale de P_2 sur $[0; 30]$ et $R_{max} = 2$ Ohms.

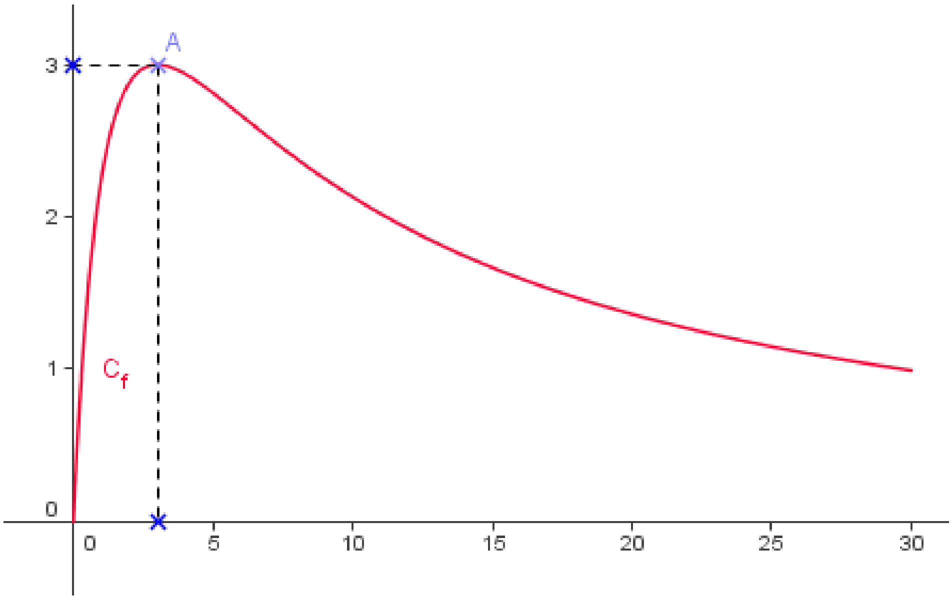
- Partie 3 : On suppose que $r = 3$ et $R = x$

1. $P_3(x)$ existe si et seulement si $R + r \neq 0 \Leftrightarrow x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$
   De plus $P_3(x) = \left(\frac{6}{x+3}\right)^2 \times x = \frac{36x}{(x+3)^2}$
2. Tabelau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_3(x)$	0	2.25	2.88	3	2.94	2.81	2.67	2.52	2.38	2.25	2.13

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P_3(x)$	2.02	1.92	1.83	1.74	1.67	1.59	1.53	1.47	1.41	1.36

x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_3(x)$	1.31	1.28	1.22	1.19	1.15	1.11	1.08	1.05	1.02	0.99

3. 

4. La puissance absorbée P_3 maximale sur $]0;30]$ est 3 Watts pour la valeur $R_{max} = 3$ Ohms.

- Partie 3 : Cas général (On prend $r \neq 0$ et on note $R = x$)

  On note donc $P_r(x) = \dfrac{36x}{(x+r)^2}$.

  1. $P_r(x) = \dfrac{9}{r} \Leftrightarrow \dfrac{36x}{(x+r)^2} = \dfrac{9}{r}$
     par produit en croix, on obtient :
     $36xr = 9(x+r)^2 \Leftrightarrow 36xr = 9x^2 + 18xr + 9r^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 18xr + 9r^2 = 0$
     $\Leftrightarrow (3x - 3r)^2 = 0 \Leftrightarrow x = r$
     On a donc $S = \{r\}$.
  2. Pour tout $x \in]0;30]$
     $P_r(x) - \dfrac{9}{r} = \dfrac{36x}{(x+r)^2} - \dfrac{9}{r} = \dfrac{36xr - 9(x+r)^2}{r(x+r)^2}$
     donc
     $P_r(x) - \dfrac{9}{r} = \dfrac{36xr - 9x^2 - 18xr - 9r^2}{r(x+r)^2} = \dfrac{-9x^2 + 18xr - 9r^2}{r(x+r)^2}$
     donc
     $P_r(x) - \dfrac{9}{r} = \dfrac{-9(x^2 - 2xr + r^2}{r(x+r)^2} = -\dfrac{9(x-r)^2}{r(x+r)^2}$
  3. Comme $P_r(x) - \dfrac{9}{r} = -\dfrac{9(x-r)^2}{r(x+r)^2}$, qu'un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{9}{r} = P_r(r)$
     alors $P_r(x) - P_r(r) < 0$ donc
     pour tout $x \in]0;30]$ on a $P_r(x) < P_r(r)$
     $P_r(r) = \dfrac{9}{r}$ Watts est donc la puissance maximale de P_2 sur $[0;30]$ et $R_{max} = r$ Ohms.