Exercice 1 :

On note $A = 4(3x+5)^2 - 49 + (8x+4)(4x+5)$

1. A existe pour toutes les valeurs de x donc $E_A = \mathbb{R}$
2. $A = 4(9x^2+30x+25) - 29 + (32x^2+40x+16x+20) = 36x^2+120x+100-49+32x^2+56x+20 = \boxed{68x^2+176x+71}$
3. L'égalité existe pour toutes les valeurs de x donc l'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$:
   $4(3x+5)^2 - 49 = [2(3x+5)-7][2(3x+5)+7] = (6x+10-7)(6x+10+7) = (6x+3)(6x+17) = 3(2x+1)(6x+17)$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(3x-7)(3x-7) = 3(2x+1)(6x+17)$
4. $A = 4(3x+5)^2 - 49 + (8x+4)(4x+5)$
   $= 3(2x+1)(6x+17) + 4(2x+1)(4x+5) = (2x+1)[3(6x+17)+4(4x+5)] = \boxed{(2x+1)(34x+71)}$
5. L'égalité existe pour toutes les valeurs de x donc l'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$:
   $A = 68\left[\left(x+\frac{22}{17}\right)^2 - \frac{729}{1156}\right] = 68\left[x^2 - \frac{44}{17}x + \frac{484}{289} - \frac{729}{1156}\right]$
   $= 68\left(x^2 + \frac{44}{17}x + \frac{1207}{1521}\right) = 68x^2+176x+71$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $A = 68\left[\left(x+\frac{22}{17}\right)^2 - \frac{729}{1156}\right]$
6. $A = 68\left[\left(-\frac{22}{17}+\frac{22}{17}\right)^2 - \frac{729}{1156}\right] = 68\left[0^2 - \frac{729}{1156}\right] = -68 \times \frac{729}{1156} = \boxed{-\frac{729}{17}}$
7. $A = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(34 \times \left(-\frac{1}{2}\right)+71\right) = 0 \times \left(34 \times \left(-\frac{1}{2}\right)+71\right) = \boxed{0}$
8. $A = 68(0)^2 + 176(0) + 71 = \boxed{71}$

Exercice 2 :

1. (a) B existe si et seulement si $3x+5 \neq 0$ et $4-7x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}$ et $x \neq \frac{4}{7}$
   donc l'ensemble d'étude est $E_B = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; \frac{4}{7}\right\}$
   (b) C existe si et seulement si $2-7x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{7}$
   donc l'ensemble d'étude est $E_C = \left]-\infty; \frac{2}{7}\right[$
   (c) D existe si et seulement si $9x^2 - 25 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{3}$ et $x \neq -\frac{5}{3}$.
   donc $E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right\}$
2. B n'existe pas pour $x = \frac{4}{7}$ car $\frac{4}{7} \notin E_B$
   $B = \frac{4}{5} - \frac{5}{4} = \frac{16}{20} - \frac{25}{20} = -\frac{9}{20}$
3. C n'existe pas pour $x = 4$ car $4 \notin E_C$ $C = \frac{3(-1)+5}{\sqrt{2-7(-1)}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
4. $D = \frac{1}{9(0)^2 - 25} = -\frac{1}{25}$

Exercice 3 :

1. $E_F = \mathbb{R}$
   $F = 9(3x-1)^2 + (7-6x)^2 = (3(3x-1)+(7-6x))(3(3x-1)-(7-6x))$
   $= (9x-3+7-6x)(9x-3-7+6x) = (3x+4)(15x-10) = \boxed{5(3x+4)(3x-2)}$
2. $E_G = \mathbb{R}$
   $G = (6x-10)(2x+3) - (5-3x)(6x+4) = 2(3x-5)(2x+3) + 2(-5+3x)(3x+2)$
   donc $G = 2(3x-5)[(2x+3)+(3x+2)] = 2(3x-5)(5x+5) = \boxed{10(3x-5)(x+1)}$

3. H existe si et seulement si $(x+5)(6x+8) \neq 0 \Leftrightarrow (x+5)(6x+8) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$ et $x \neq -\dfrac{4}{3}$ donc $E_H = \mathbb{R} \setminus \left\{-5; -\dfrac{4}{3}\right\}$
$H = \dfrac{2(x^2-25)}{(x+5)(6x+8)} = \dfrac{2(x+5)(x-5)}{2(x+5)(3x+4)} = \boxed{\dfrac{x-5}{3x+4}}$
4. $E = \mathbb{R}$
$(2x+3)(9x-1) = (2x+3)(2x+7)$
$\Leftrightarrow (2x+3)(9x-1) - (2x+3)(2x+7) = 0$
$\Leftrightarrow (2x+3)[(9x-1) - (2x+7)] = 0$
$\Leftrightarrow (2x+3)[9x-1-2x-7] = 0$
$\Leftrightarrow (2x+3)(7x-8) = 0$
$\Leftrightarrow 2x+3 = 0$ et $7x-8 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \dfrac{8}{7}$
donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{8}{7}\right\}$
5. $E = \mathbb{R}$
$(2x+4)(2x-1) = (2x+3)(2x+7)$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 8x - 4 = 4x^2 + 14x + 6x + 21$
$\Leftrightarrow 6x - 4 = 20x + 21$
$\Leftrightarrow -25 = 14x$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{25}{148} = -\dfrac{25}{14}$
donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{25}{14}\right\}$
6. $E = \mathbb{R}$
$3x^2 - 7 = 0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x + \sqrt{7})(\sqrt{3}x - \sqrt{7}) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + \sqrt{7} = 0$ ou $\sqrt{3}x - \sqrt{7} = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{21}}{3}$
donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{21}}{3}; \dfrac{\sqrt{21}}{3}\right\}$

Exercice Facultatif :

L'égalité existe si et seulement si $x+3 \geq 0$ et $\sqrt{x-3} - 5 \neq 0$ et $x - 22 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \geq -3$ et $x \neq 22$ et $x \neq 22$
donc l'ensemble d'étude est $E = [-3; +\infty[\setminus \{22\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x+5}-5} = \dfrac{(\sqrt{x+3}+5)}{(\sqrt{x+3}-5)(\sqrt{x+3}+5)}$
$= \dfrac{(\sqrt{x+3}+5)}{x+3-25} = \dfrac{\sqrt{x+3}+5}{x-224}$