Exercice 1 :

$A = \dfrac{15}{10} - \dfrac{2-3\times(5+1\times(-2))}{14} = \dfrac{15}{10} - \dfrac{2-3\times(3)}{14} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{-7}{14} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2 \in \mathbb{N}}$

$B = \dfrac{2\sqrt{80}-\sqrt{500}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{4^2\times 5}-\sqrt{10^2\times 5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\times 4\sqrt{5}-10\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \boxed{-\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}}$

$C = \dfrac{5\times 10^{-785}\times 4\times 10^{123}}{20\times 10^{-245}} = \dfrac{20\times 10^{-662}}{20\times 10^{-245}} = 10^{-662+245} = \boxed{10^{-417} \in \mathbb{D}}$

Exercice 2 :

1. On note $x = 0,0236236\underline{236}$ donc $1000x = 23,6\underline{236}$ donc $1000x - x = 23,6$ donc $999x = 23,6$ donc $x = \dfrac{236}{9990} = \dfrac{118}{4995}$

   On a donc $z = 1 - \dfrac{118}{4995} = \dfrac{4495-118}{4995} = \boxed{\dfrac{4877}{4995}}$

2. On pose $x = 22222222$ et donc on a
   $A = \sqrt{66666666^2 + 7\times 22222222^2} = \sqrt{(3x)^2+7x^2} = \sqrt{9x^2+7x^2} = \sqrt{16x^2 = 4x} = \boxed{88888888}$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,
   $(5a-4)^2 - (5a+4)^2 = [(5a)^2 - 2(5a)(4) + (4)^2] - [(5a)^2 + 2(5a)(4) + (4)^2] = 25a^2 - 40a + 16 - 25a^2 - 40a - 16 = \boxed{-80a}$

4. $-880 = -80\times 11$ donc d'après la question précédente :
   $-880 = (5\times 11 - 4)^2 - (5\times 11+4)^2 = \boxed{51^2 - 59^2}$

Exercice 3 :

1. On obtient $\boxed{a = 2^3\times 5^2\times 7\times 17\times 11}$ et $\boxed{b = 2^2\times 5\times 7^2\times 13}$

2. $\dfrac{261800}{12740} = \dfrac{2^3\times 5^2\times 7\times 17\times 11}{2^2\times 5\times 7^2\times 13} = \dfrac{2\times 5\times 11\times 17}{7\times 13} = \boxed{\dfrac{1870}{91}}$

3. $\sqrt{12740} = \sqrt{2^2\times 5\times 7^2\times 13} = 2\times 7\times\sqrt{5\times 13} = \boxed{14\sqrt{65}}$

4. $\text{pgcd}(261800; 12740) = 2^2\times 5\times 7 = 140$ donc $\boxed{\text{pgcd}(261800; 12740) = 140}$

5. $\text{ppcm}(261800; 12740) = 2^3\times 5^2\times 7^2\times 17\times 11\times 13 = 23823800$ donc $\boxed{\text{ppcm}(261800; 12740) = 23823800}$

Exercice 4 :

1. $\varphi^2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right)^2 = \dfrac{(1-\sqrt{29})^2}{4} = \dfrac{1-2\sqrt{29}+29}{4} = \dfrac{30-2\sqrt{29}}{4} = \dfrac{2(15-\sqrt{29})}{2\times 2} = \boxed{\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}}$

   et $\varphi + 7 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2} + \dfrac{14}{2} = \boxed{\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}}$

   donc on a bien $\boxed{\varphi^2 = \varphi + 7}$

2. Comme $\varphi^2 = \varphi + 7$ alors $\varphi^3 = \varphi\times\varphi^2 = \varphi(\varphi+7) = \varphi^2 + 7\varphi$
   or $\varphi^2 = \varphi + 7$ donc $\varphi^3 = (\varphi+7) + 7\varphi = 8\varphi + 7$
   donc $\boxed{\varphi^3 = 8\varphi + 7}$

3. $\varphi^4 = \varphi\times\varphi^3$
   or $\varphi^3 = 8\varphi + 7$ donc $\varphi^4 = \varphi(8\varphi+7) = 8\varphi^2 + 7\varphi$
   or $\varphi^2 = \varphi + 7$ donc $\varphi^4 = 8(\varphi+7) + 7\varphi = 15\varphi + 56$
   donc $\boxed{\varphi^4 = 15\varphi + 56}$

Exercice 5 :

On note $a = 3\sqrt{5}$ et $b = -2$
Calculer :

1. $A = \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}-2} = \dfrac{1\times(3\sqrt{5}+2)}{(3\sqrt{5}-2)\times(3\sqrt{5}+2)} = \dfrac{3\sqrt{5}+2}{9\times 5-4} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{5}+2}{41}}$
2. $B = ab^2 + a^2b = (3\sqrt{5})\times 4 + 45\times(-2) = \boxed{12\sqrt{5}-90}$
3. $C = 3(2a-1)^2 - b^2 = 3(6\sqrt{5}-1)^2 - 4 = 3(180-12\sqrt{5}+1) - 4 = \boxed{539-36\sqrt{5}}$

Exercice facultatif

Si p un nombre premier supérieur ou égal à 3 alors il est impair donc p^2 est aussi un nombre impair et donc p^2-1 est un nombre pair. Comme p^2-1 est pair alors $\dfrac{p^2-1}{2} \in \mathbb{N}$.