

CAPES 2007

(Correction du sujet d'analyse)

Dernière mise à jour : Mardi 17 Avril 2007

Vincent OBATON, lycée Stendhal de Grenoble (vincent.obaton@ac-grenoble.fr)
Avec la correction attentive de Muriel et Nathalie Daval

J'aimais et j'aime
encore les ma-
thématiques pour
elles-mêmes comme
n'admettant pas
l'hypocrisie et le
vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite	4
1.1 Première méthode	4
1.2 Deuxième méthode	4
1.3 Troisième méthode	4
2 DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes	5
3 TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis	9
4 QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet	12
5 CINQUIÈME PARTIE : Une somme double	15
6 SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme	18

1 PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

1.1 Première méthode

a) $\forall k \geq 2$ on a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

de plus $\forall k \geq 2$ on a $k \geq k-1 > 0$ donc $k^2 \geq k(k-1) > 0$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

Conclusion : $\forall k \geq 2$ on a $\boxed{\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$

b) $S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$

Or d'après a) $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Donc $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

Or $1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\boxed{0 < S_n < 2}$

c) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante or d'après la question précédente elle est majorée donc elle converge et 2 est un de ses majorants.

1.2 Deuxième méthode

a) $t_n - S_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n - S_n = 0$

De plus

$$t_{n+1} - t_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

Or $n \geq 1$ on a $(n+1)^2 > n(n+1)$ donc $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} < 0$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n - S_n = 0 \\ \bullet (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante} \\ \bullet (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante} \end{array} \right. \quad \text{donc } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}$$

b) D'après la question précédente $t_{10} = S_{10} + \frac{1}{10}$ et $S_{10} < S < t_{10}$

Or $S_{10} \approx 1.549767731$ et $t_{10} \approx 1.649767731$ donc $\boxed{1.549767 < S < 1.649767}$

1.3 Troisième méthode

On note la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur \mathbb{R}^* .

1. Étudier rapidement la fonction f .

2. Tracer \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
3. En utilisant les résultats précédents, démontrer que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx$$

4. On note $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

- (a) Montrer que $S_n > 0$
- (b) Dédurre des questions précédentes que $0 < S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$
- (c) En déduire que $0 < S_n < \frac{2n-1}{n}$ Démontrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
- (d) Que peut-on en déduire sur la convergence de S_n ?

2 DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$ et $\sigma_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ alors :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2. (a) Démontrons cette formule à l'aide de celle du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_p^n a^{n-p} b^p$$

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

On remarque que $\sin[(2p+1)\varphi] = \text{Im} [e^{i(2p+1)\varphi}] = \text{Im} [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2p+1}]$

On obtient, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2p+1} = \sum_{m=0}^{2p+1} C_m^{2p+1} \cos^{2p+1-m} \varphi \times i^m \times \sin^m \varphi$$

On applique ensuite le changement de variable $m = 2k + 1$ pour obtenir la partie imaginaire et on obtient :

$$i \sin(2p+1)\varphi = \sum_{k=0}^p C_{2k+1}^{2p+1} \cos^{2p+1-2k-1} \varphi \times i^{2k+1} \times \sin^{2k+1} \varphi$$

Or $i^{2k+1} = i \times i^{2k} = i(-1)^k$, donc :

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(2p+1)\varphi = \sum_{k=0}^p C_{2k+1}^{2p+1} \cos^{2p-2k} \varphi \times (-1)^k \times \sin^{2k+1} \varphi$$

- (b) Soit $\varphi \neq 0 + 2k\pi$ alors $\sin(2p+1)\varphi \neq 0$
 On peut donc factoriser la formule précédente par $\sin^{2p+1}\varphi$
 On obtient donc :
 $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathbb{R}$ avec $\varphi \neq 0 + 2k\pi$ on a

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi \times \sin^{2k+1}\varphi}{\sin^{2p+1}\varphi}$$

donc

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p+1-2k-1}\varphi}$$

d'où

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p-2k}\varphi}$$

$$\text{or } (\text{Cotan}^2\varphi)^{p-k} = \frac{\cos^{2(p-k)}\varphi}{\sin^{2(p-k)}\varphi} = \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p-2k}\varphi}$$

donc

$$\boxed{\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} (\text{Cotan}^2\varphi)^{p-k}}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} X^{p-k}$

- (a) On note $\forall k \in [1, p]$, $\gamma_k = \text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$

Calculons $P(\gamma_k)$:

Si $k \in [1, p]$ alors $\gamma_k \neq 0 + 2k'\pi$ donc

$$P(\gamma_k) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} (\gamma_k)^{p-k} = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \left(\text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k}$$

En utilisant la formule de la question précédente et sachant que $\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$ on trouve que

$$P(\gamma_k) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0$$

et donc

$$\boxed{P(\gamma_k) = 0}, \forall k \in [1, p]$$

- (b) $\forall k \in [1, p]$ alors $\pi < k\pi \leq \pi p$ donc $0 < \frac{\pi}{2p+1} \leq \frac{k\pi}{2p+1} \leq \frac{\pi p}{2p+1}$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{k\pi}{2p+1} \leq \frac{\pi p}{p\left(2 + \frac{1}{p}\right)} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \forall k \in [1, p] \text{ alors } \boxed{\frac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[}$$

On a évidemment $\frac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ alors $\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$

Comme $\forall k \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{k\pi}{2p+1} \neq \frac{(k+1)\pi}{2p+1}$ et comme la fonction $x \mapsto \text{Cotan}(x)$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ alors toutes les racines de P sont distincts.
 Conclusion : P admet $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}, \gamma_p$ comme racines distincts avec

$$\gamma_k = \text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right).$$

(c) D'après la deuxième partie, 1) on a $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ or $\sigma_1 = \sum_{k=1}^p \gamma_k$

donc

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^p \gamma_k = -\frac{(-1)^1 C_3^{2p+1}}{(-1)^0 C_1^{2p+1}} = \frac{(2p+1)!}{3!(2p-2)!} = \frac{(2p)!}{3!(2p-2)!} = \frac{(2p-1)(2p)}{2 \times 3} = \frac{p(2p-1)}{3}$$

Or $\sigma_1 = \sum_{k=1}^p \gamma_k = \sum_{k=1}^p \text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^p \text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}$$

Ensuite $\forall \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\text{Cotan}^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1$$

Donc pour $\varphi = \frac{k\pi}{2p+1}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^p 1 + \sum_{k=1}^p \text{Cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3}$$

donc

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{3p + 2p^2 - p}{3} = \frac{p(2p+2)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}}$$

4. On a toujours $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$

(a) $\forall \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin \varphi > 0$

► On note f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que $f(x) = \sin x - x$

f est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et comme $f(0) = 0$

alors $\forall \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\boxed{0 < \sin \varphi < \varphi}$

► On note g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $f(x) = \tan x - x$

g est continue et dérivable sur son domaine de définition et
 $g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$
donc g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et comme $g(0) = 0$
alors $\forall \varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on a $\boxed{\varphi < \tan \varphi}$

Conclusion :

$$\forall \varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[\text{ on a } \boxed{0 < \sin \varphi < \varphi < \tan \varphi}$$

(b) On sait d'après II 3) b) que $\frac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc d'après la question précédente

$$0 < \sin \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{k\pi}{2p+1} < \tan \frac{k\pi}{2p+1}$$

Or la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$0 < \sin^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)^2 < \tan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$$

Or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)} < \left(\frac{2p+1}{k\pi} \right)^2 < \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)}$$

donc

$$\sum_{k=1}^p \text{Cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right) < \sum_{k=1}^p \left(\frac{2p+1}{k\pi} \right)^2 < \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)}$$

D'après la question II 3) c) on obtient donc

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \sum_{k=1}^p \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \times \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\boxed{\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}}$$

(c) $\frac{(2p+1)^2}{\pi^2} > 0$ donc on peut diviser l'inégalité par $\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}$ pour obtenir

$$\frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \times \frac{p(2p-1)}{3} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \times \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < S_n < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

or

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'après le Théorème d'encadrement des suites (ou Théorème des Gendarmes) on obtient :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

5. Etude de certaines suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et $U = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$ donc $U = \frac{\pi^2}{24}$

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n+1} - u_n$$

or S_{2n+1} est une suite extraite de S_n donc elle est convergente

donc $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et $V = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ donc $V = \frac{\pi^2}{8}$

$$\Rightarrow w_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = -u_n + v_n$$

donc $(w_{2n+1})_{n \geq 1}$ est convergente.

De plus

$$\Rightarrow w_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = -u_n + v_{n-1}$$

donc $(w_{2n})_{n \geq 1}$ est convergente.

$$\Rightarrow w_{2(n+1)+1} - w_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} > 0 \text{ donc } (w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

$$\Rightarrow w_{2(n+1)} - w_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} > 0 \text{ donc } (w_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

Les suites $(w_{2n+1})_{n \geq 1}$ et $(w_{2n})_{n \geq 1}$ ont la même limite, l'une est croissante, l'autre est décroissante et donc elles sont adjacentes

De plus $w_{2n} \leq w_n \leq w_{2n+1}$ (évident par différence Ex : $w_{2n} - w_n \leq 0$)

donc on peut conclure que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente par le théorème d'encadrement

$$\text{et } W = -U + V = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{2\pi^2}{24} \text{ donc } W = \frac{\pi^2}{12}$$

3 TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calcul de I_0 et J_0 :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \text{ donc } I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} \text{ donc } J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

2. Recherche de I_n en fonction de n :

$$(a) I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \times \cos t dt$$

On pose $v(t) = \cos^{2n+1} t$ et $u(t) = \sin t$.

Les deux fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} t dt = [t \times \cos^{2n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1) \sin^2 t \cos^{2n} t dt$$

donc

$$I_{n+1} = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt = (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$$

donc

$$I_{n+1} + (2n+1)I_{n+1} = (2n+1)I_n \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n}$$

(b) Montrons cette formule par récurrence :

On note (\mathcal{P}_k) la propriété : $I_k = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \frac{\pi}{2}$

▮ (\mathcal{P}_0) est vraie car $I_0 = \frac{\pi}{2}$

▮ On suppose maintenant que (\mathcal{P}_n) soit vraie.

▮ Montrons que dans ce cas (\mathcal{P}_{n+1}) l'est aussi :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

donc (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

Par récurrence on prouve donc que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

$$3. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt$$

(a) On pose $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v(t) = t$.

Les deux fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

$$I_n = [t \cos^{2n} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \times \cos^{2n-1} t dt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \times \cos^{2n-1} t dt$$

On pose $u(t) = \sin t \times \cos^{2n-1} t$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$.

Les deux fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

On note que

$$u'(t) = \cos^{2n} t - (2n-1) \sin^2 t \cos^{2n-2} t = \cos^{2n} t - (2n-1)(1 - \cos^2 t) \cos^{2n-2} t = 2n \cos^{2n} t - (2n-1) \cos^{2n-2} t$$

donc

$$I_n = 2n \left(\left[\frac{t^2}{2} \sin t \times \cos^{2n-1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n t^2 \cos^{2n} t - \frac{2n-1}{2} t^2 \cos^{2n-2} t dt \right)$$

$$\text{donc } I_n = 2n \left(-2J_n + \frac{2n-1}{2} J_{n-1} \right) = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$$

(b) D'après la question précédente et la III 3) b) on obtient :

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{n(2n-1)(2(n-1))!}{4^{n-1}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2} - 2n^2 \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} K_n$$

$$\text{donc} \\ \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2(2n)!}{4^n((n-1)!)^2} [K_{n-1} - K_n]$$

En divisant par $\frac{2(2n)!}{4^n((n-1)!)^2}$ on obtient :

$$K_{n-1} - K_n = \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n^2}$$

donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$$

(c) D'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4k^2} = \sum_{k=1}^n (K_{k-1} - K_k) = K_0 - K_n$$

or $K_0 = J_0$ donc on obtient la relation :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n}$$

4. Encadrement de J_n et K_n

(a) La fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est concave donc sa courbe est au-dessus de la corde

d'extrémités les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$\text{donc } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ on a } \sin x \geq \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \sin x \geq x$$

$$(b) J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t dt$$

▮ $t^2 \cos^{2n} t \geq 0$ et $0 < \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $J_n \geq 0$

▮ De plus pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction carré est croissante donc d'après la question

précédente on a $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t$

donc

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \times \cos^{2n} t dt$$

donc

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt$$

donc

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt - \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} t dt$$

donc

$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4} I_n - \frac{\pi^2}{4} I_{n+1} = \frac{\pi^2}{4} \left[1 - \frac{2n+1}{2(n+1)} \right] I_n = \frac{\pi^2}{8(n+1)} I_n$$

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$$

De plus $K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n \leq \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$

or $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$

donc

$$K_n \leq \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{\pi^2}{8(n+1)} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

(c) D'après la question précédente, on obtient : $-\frac{\pi^3}{16(n+1)} \leq -K_n \leq 0$

or d'après la question III 3) c) on a $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$

donc

$$J_0 - \frac{\pi^3}{16(n+1)} \leq \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq J_0$$

donc

$$\frac{4}{\pi} \left(J_0 - \frac{\pi^3}{16(n+1)} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{4}{\pi} J_0$$

or

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \left(J_0 - \frac{\pi^3}{16(n+1)} \right) = \frac{4}{\pi} J_0 = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} J_0 = \frac{\pi^2}{6}$$

donc d'après le théorème d'encadrement des suites (ou théorème des Gendarmes) on obtient :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4 QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

1. On note $x \neq 0 + 2k\pi$ alors $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

$$2D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(kx) + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=-n}^n \cos(kx) = \mathcal{R}_e \left(\sum_{k=-n}^n e^{ikx} \right)$$

donc

$$2D_n(x) = \mathcal{R}_e \left(e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \mathcal{R}_e \left(\frac{e^{-inx} \times e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \right)$$

donc

$$2D_n(x) = \mathcal{R}_e \left(\frac{e^{-inx} \times e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{2i \sin \left(\frac{2n+1}{2} x \right)}{2i \sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

Conclusion :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$

(a) On note $K = \int_0^\pi x \cos(kx) dx$

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$

Les deux fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

$$K = \left[\frac{x}{k} \sin(kx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k} \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^\pi$$

donc

$$K = -\frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k} (-1)^k + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$$

Conclusion :

$$\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$$

(b) $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx = \int_0^\pi x \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right] dx$

donc

$$L_n = \int_0^\pi \frac{x}{2} dx + \int_0^\pi x \sum_{k=1}^n \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x \cos(kx) dx$$

or d'après la question précédente $\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$

donc

$$L_n = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1) = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Conclusion :

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$$

3. On note f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \text{ si } x \in]0; \pi] \text{ et } f(0) = 2$$

► f est continue sur $[0; \pi]$ ► f est dérivable sur $]0; \pi]$ et $f'(x) = \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$

► En 0, on a :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h}{\sin(\frac{h}{2})} - 2}{h} = \frac{\frac{h - 2 \sin(\frac{h}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}}{h} = \frac{h - 2 \sin(\frac{h}{2})}{h \sin(\frac{h}{2})} = \frac{h - 2 \left(\frac{h}{2} - \frac{h^3}{48} + o(h^3) \right)}{h \left(\frac{h}{2} - \frac{h^3}{48} + o(h^3) \right)}$$

donc

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h^3}{24} + o(h^3)}{\frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{h^2}{24} + o(h^3) \right)} = \frac{\frac{h}{12} + o(h)}{1 - \frac{h^2}{24} + o(h^3)} = \left(\frac{h}{12} + o(h) \right) \left(1 + \frac{h^2}{24} + o(h) \right)$$

donc

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h}{12} + o(h)$$

donc $f'(0)$ existe et vaut 0.

► Montrons que f' est continue en 0 :

En 0, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \right)^2} = \frac{\frac{x^3}{24} + o(x^3)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

donc

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{6} + o(x)}{1 + o(1)} = \frac{x}{6} + o(x)$$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0.

► d'autre part, f' est continue sur $]0; \pi]$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0; \pi]$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$

4. Soit $\phi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$.

ϕ et $x \mapsto \sin(\lambda x)$ sont toutes les deux de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$

On peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

$$\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = \left[-\frac{\phi(x)}{\lambda} \cos(\lambda x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\phi'(x)}{\lambda} \cos(\lambda x) dx$$

donc

$$\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| = \left| -\frac{\phi(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda \pi) - \frac{\phi(0)}{\lambda} + \int_0^\pi \frac{\phi'(x)}{\lambda} \cos(\lambda x) dx \right|$$

Or ϕ' est continue sur le compact $[0; \pi]$ donc elle atteint ses bornes et il existe N dans \mathbb{R} tel

$$\text{que } N = \left| \sup_{x \in [0; \pi]} \phi'(x) \right|.$$

On a donc

$$\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \left| \frac{\phi(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda \pi) + \frac{\phi(0)}{\lambda} \right| + N \left| \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} dx \right|$$

donc

$$\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \left| \frac{\phi(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda \pi) + \frac{\phi(0)}{\lambda} \right| + N \left| \left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda^2} \right]_0^\pi \right|$$

donc

$$\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \left| \frac{\phi(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda \pi) + \frac{\phi(0)}{\lambda} \right| + N \left| \frac{\sin(\lambda \pi)}{\lambda^2} \right|$$

Or $|\cos(\lambda \pi)| \leq 1$ et $|\sin(\lambda \pi)| \leq 1$

donc

$$\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \left| \frac{\phi(\pi)}{\lambda} + \frac{\phi(0)}{\lambda} \right| + N \left| \frac{1}{\lambda^2} \right|$$

or

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\phi(\pi)}{\lambda} + \frac{\phi(0)}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2}$$

donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = 0}$$

5. On sait que $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$ et $D_n(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$

(a) On a donc

$$L_n = \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$$

On sait que la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$ d'après la question 3).

On peut donc appliquer la formule du 4) avec $\phi(x) = f(x)$ et $\lambda = n + \frac{1}{2}$

On obtient donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0}$$

(b) On utilise la question IV 2) b) et II 5)

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{\pi^2}{4} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - S - W$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0 \text{ donc } S = \frac{\pi^2}{4} - W$$

Cherchons W en fonction de S .

$$\text{D'après la question I 5) on a } U = \frac{1}{4}S, W = V - U = (S - U) - U = S - 2U = \frac{1}{2}S$$

$$\text{donc } \frac{3}{2}S = \frac{\pi^2}{4} \text{ donc } S = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

5 CINQUIÈME PARTIE : Une somme double

1. On note N un entier tel que $N \geq 1$

(a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

On a donc

$$\forall n > 1, \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx$$

donc en sommant de 2 à N on obtient

$$\sum_2^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_2^N \frac{1}{n} \leq \sum_2^N \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \text{ donc } \int_2^{N+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_2^N \frac{1}{n} \leq \int_1^N \frac{1}{x} dx$$

En calculant les intégrales, on obtient

$\ln(N+1) - \ln 2 \leq H_N - 1 \leq \ln N$ donc $\ln(N+1) + 1 - \ln 2 \leq H_N \leq 1 + \ln N$
 or $1 - \ln 2 \approx 0.3069 > 0$ donc $\ln(1+N) < \ln(N+1) + 1 - \ln 2$

donc $\boxed{\ln(N+1) < H_N \leq 1 + \ln(N)}$

(b) D'après la question précédente, si $N \neq 0$ on a $\frac{\ln(N+1)}{N} < \frac{H_N}{N} \leq \frac{1 + \ln(N)}{N}$
 or

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N+1)}{N} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(N)}{N} = 0$$

donc d'après le théorème d'encadrement, on a $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{H_N}{N} = 0}$

(c) Pour tout $M \geq 2$ on applique la transformation d'Abel à $\sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \frac{1}{m}$

$$\text{donc} \quad \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \frac{1}{m} = 1 + \sum_{m=2}^M \frac{1}{m} (H_m - H_{m-1}) = 1 - \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{M} H_M + \sum_{m=2}^{M-1} H_m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$\text{donc} \quad \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^2} = \frac{H_M}{M} + \sum_{m=1}^{M-1} H_m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$\text{or} \quad \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{m(m+1)}$$

donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^M \frac{1}{m^2} = \frac{H_M}{M} + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}}$$

(d) Comme $\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} = S_M - \frac{H_M}{M}$, que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{H_N}{N} = 0$

et que S_M converge alors $\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$ converge aussi

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)} = \frac{\pi^2}{6}}$$

2. On note m un entier tel que $m \geq 2$

(a) On remarque que

Comme $m \geq 2$ alors $n+m-1 \neq 0$ et comme $n \neq 0$ alors on a

$$\frac{1}{n(n+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1} \right)$$

donc

$$Z_{N,m} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1} \right) = \frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1} \right)$$

donc

$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+m-1} \right)$ et en posant dans la deuxième somme $k = n + m - 1$ on obtient

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=m}^{N+m-1} \frac{1}{k} \right)$$

Il y a deux cas possibles :

▮ Si $m \leq N$ alors

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=m}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=m}^{N+m-1} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right)$$

▮ Si $m \geq N$ alors

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{m-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right)$$

Conclusion : Pour tout entier $m \geq 2$ on a :

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right)$$

(b) On a $0 < \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} < \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{N+1} < (N+m-1 - N - 1 + 1) \frac{1}{N+1} < \frac{m-1}{N+1}$
 or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m-1}{N+1} = 0$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} Z_{N,m} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right) = \frac{H_{m-1}}{m-1}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}$$

3. Etude de la somme double :

(a) Pour tout entier $N \geq 1$ et tout entier $M \geq 2$ on a

$$A_{n,m} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{mn(n+m-1)}$$

donc

$$A_{n,m} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m-1)} = \sum_{m=1}^M \frac{Z_{N,m}}{m}$$

donc

$$A_{n,m} = \frac{Z_{N,1}}{1} + \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m}$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m}$$

(b) Calculons la limite de la relation précédente lorsque N tend vers $+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m} = \sum_{m=2}^M \frac{\lim_{N \rightarrow +\infty} Z_{N,m}}{m} = \sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)}$ existe et vaut $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m}$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}}$$

(c) On a $\sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m(m-1)} = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$$

or d'après la question V 1) d) on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} = \frac{\pi^2}{6}$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} \right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{mn(n+m-1)} \right) = \frac{\pi^2}{3}}$$

6 SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $[-1; 0[\cup]0; 1[$

De plus :

$$\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t \text{ donc } \frac{\ln(1-t)}{t} \underset{0}{\sim} -1$$

donc $\frac{\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $[-1; 1[$

2. $f(t) \underset{1}{\sim} \ln(1-t)$, or $\ln(1-t)$ est intégrable sur $]0; 1[$ donc $Li(1)$ existe et $\lim_{x \rightarrow 1} Li(x) = Li(1)$

3. Développement de $Li(x)$ en série entière :

(a) Pour tout $x \in]-1; 1[$ on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$\text{donc } -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ et donc en intégrant } \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{On obtient donc que } \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

donc

$$\text{Li}(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt$$

Puisque $x \in]-1; 1[$ alors la convergence de la série entière est normale donc uniformément convergente et on peut donc intervertir somme et intégrale, pour obtenir

$$\text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{n^2} \right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

donc

$$\boxed{\text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$$

(b) La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est uniformément convergente sur $] -1, 1[$ et $\text{Li}(x)$ est

$$\text{prolongeable par continuité en } 1 \text{ donc } \text{Li}(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donc

$$\boxed{\text{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

4. Etude de $\text{Li}(x) + \text{Li}(1-x)$:

(a) On applique la formule suivante :

$$\text{Si } f(x) = \int_0^{ax+b} g(t) dt \text{ alors } f'(x) = ag(ax+b)$$

On obtient donc pour tout $x \in]0; 1[$ que $(\text{Li}(x))' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ et $(\text{Li}(1-x))' = \frac{\ln(x)}{1-x}$

Conclusion :

$$\boxed{(\text{Li}(x) + \text{Li}(1-x))' = \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}$$

(b) Si on pose $u(x) = -\ln(1-x)$ et $v(x) = \ln(x)$ alors on a

$$\text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\text{donc } \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = -\ln(1-x)\ln(x) + \lambda$$

$$\text{De plus } \ln(1-x)\ln(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x)\ln(x) = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = \lambda \text{ donc } \lambda = \text{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[, \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)}$$

5. On applique la formule précédente pour $x = \frac{1}{2}$ en sachant que

$$\text{Li}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} \text{ et que } \text{Li}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \text{Li}\left(\frac{1}{2}\right)$$

donc

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - (\ln(2))^2$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(2))^2}{2}}$$

6. Etude de $\text{Li}(x) + \text{Li}(-x)$:

(a) Pour tout $x \in]-1; 1[$ on a $(\text{Li}(x) + \text{Li}(-x))' = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}$

or $\text{Li}(0) + \text{Li}(-0) = 0$ donc

$$\text{Li}(x) + \text{Li}(-x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t} dt$$

On applique le changement de variable $u = t^2$ ($dt = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}}$) alors

$$\text{Li}(x) + \text{Li}(-x) = - \int_0^{x^2} \frac{1}{2} \frac{\ln(1-u)}{u} du = \frac{1}{2} \text{Li}(x^2)$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Li}(x) + \text{Li}(-x) = \frac{1}{2} \text{Li}(x^2)}$$

(b) D'après la formule précédente : $\text{Li}(1) + \text{Li}(-1) = \frac{1}{2} \text{Li}(1)$

$$\text{donc } \text{Li}(-1) = -\frac{1}{2} \text{Li}(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

7. Etude de $A(x) = \text{Li}(x) - \text{Li}(-x) + \text{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \text{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)$

(a) $\Rightarrow (\text{Li}(x))' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

$$\Rightarrow (\text{Li}(-x))' = -\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\text{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right)' = \frac{2}{1-x^2} \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\text{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) \right)' = \frac{2}{1-x^2} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

On obtient donc

$$A'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{2}{1-x^2} \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \frac{2}{1-x^2} \ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

donc

$$A'(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2}{1-x^2} \ln(x)$$

donc

$$A'(x) = (\ln(x))' \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right)' \ln(x)$$

On a donc

$$A(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x) + \alpha$$

Pour trouver α on fait tendre x vers 0 et on obtient :

$$\text{Li}(1) - \text{Li}(-1) = \alpha$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Li}(x) - \text{Li}(-x) + \text{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \text{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x)}$$

(b) On applique la formule précédente pour $x = \sqrt{2} - 1$

On obtient

$$\text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(1-\sqrt{2}) + \text{Li}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \text{Li}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \ln(\sqrt{2}-1)$$

donc

$$\text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(1-\sqrt{2}) + \text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \ln(\sqrt{2}+1) \ln(\sqrt{2}-1)$$

donc

$$2(\text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(1-\sqrt{2})) = \frac{\pi^2}{4} + \ln(\sqrt{2}+1) \ln(\sqrt{2}-1)$$

donc

$$\text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \ln(\sqrt{2}-1)$$

Dans le membre de gauche il reste que les termes d'exposants impairs, donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \ln(\sqrt{2}-1)}$$