CAPES 2007

(Correction du sujet d'analyse)

Dernière mise à jour : Mardi 17 Avril 2007

Vincent OBATON, lycée Stendhal de Grenoble (vincent.obaton@ac-grenoble.fr)
Avec la correction attentive de Muriel et Nathalie Daval

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite **4**
- 1.1 Première méthode 4
- 1.2 Deuxième méthode 4
- 1.3 Troisième méthode 4

2 DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes **5**

3 TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis **9**

4 QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet **12**

5 CINQUIÈME PARTIE : Une somme double **15**

6 SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme **18**

1 PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

1.1 Première méthode

a) $\forall k \geq 2$ on a $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$

de plus $\forall k \geq 2$ on a $k \geq k-1 > 0$ donc $k^2 \geq k(k-1) > 0$ d'où $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$

Conclusion : $\forall k \geq 2$ on a $\boxed{\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}}$

b) $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$

Or d'après a) $\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

Donc $S_n \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

Or $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\boxed{0 < S_n < 2}$

c) $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante or d'après la question précédente elle est majorée donc elle converge et 2 est un de ses majorants.

1.2 Deuxième méthode

a) $t_n - S_n = \dfrac{1}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n - S_n = 0$

De plus

$t_{n+1} - t_n = S_{n+1} - S_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)}$

Or $n \geq 1$ on a $(n+1)^2 > n(n+1)$ donc $\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} < 0$

On a donc :

$$\begin{cases} \bullet \displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n - S_n = 0 \\ \bullet (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante} \\ \bullet (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante} \end{cases}$$

donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) D'après la question précédente $t_{10} = S_{10} + \dfrac{1}{10}$ et $S_{10} < S < t_{10}$

Or $S_{10} \approx 1.549767731$ et $t_{10} \approx 1.649767731$ donc $\boxed{1.549767 < S < 1.649767}$

1.3 Troisième méthode

On note la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Étudier rapidement la fonction f.

2. Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
3. En utilisant les résultats précédents, démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx$$

4. On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

   (a) Montrer que $S_n > 0$

   (b) Déduire des questions précédentes que $0 < S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$

   (c) En déduire que $0 < S_n < \frac{2n-1}{n}$ Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

   (d) Que peut-on en déduire sur la convergence de S_n ?

2 DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$ et $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ alors :

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

2. (a) Démontrons cette formule à l'aide de celle du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n a^{n-p} b^p$$

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
On remarque que $\sin[(2p+1)\varphi] = Im\left[e^{i(2p+1)\varphi}\right] = Im\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2p+1}\right]$
On obtient, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2p+1} = \sum_{m=0}^{2p+1} C_m^{2p+1} \cos^{2p+1-m}\varphi \times i^m \times \sin^m\varphi$$

On applique ensuite le changement de variable $m = 2k+1$ pour obtenir la partie imaginaire et on obtient :

$$i\sin(2p+1)\varphi = \sum_{k=0}^{p} C_{2k+1}^{2p+1} \cos^{2p+1-2k-1}\varphi \times i^{2k+1} \times \sin^{2k+1}\varphi$$

Or $i^{2k+1} = i \times i^{2k} = i(-1)^k$, donc :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ on a

$$\boxed{\sin(2p+1)\varphi = \sum_{k=0}^{p} C_{2k+1}^{2p+1} \cos^{2p-2k}\varphi \times (-1)^k \times \sin^{2k+1}\varphi}$$

(b) Soit $\varphi \neq 0 + 2k\pi$ alors $\sin(2p+1)\varphi \neq 0$
On peut donc factoriser la formule précédente par $\sin^{2p+1}\varphi$
On obtient donc :
$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ avec $\varphi \neq 0 + 2k\pi$ on a

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi \times \sin^{2k+1}\varphi}{\sin^{2p+1}\varphi}$$

donc

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p+1-2k-1}\varphi}$$

d'òu

$$\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p-2k}\varphi}$$

or $(Cotan^2\varphi)^{p-k} = \dfrac{\cos^{2(p-k)}\varphi}{\sin^{2(p-k)}\varphi} = \dfrac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p-2k}\varphi}$
donc

$$\boxed{\sin(2p+1)\varphi = \sin^{2p+1}\varphi \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} (Cotan^2\varphi)^{p-k}}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} X^{p-k}$

(a) On note$\forall k \in [|1,p|]$, $\gamma_k = Cotan^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$
Calculons $P(\gamma_k)$:
Si $k \in [|1,p|]$ alors $\gamma_k \neq 0 + 2k'\pi$ donc
$P(\gamma_k) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} (\gamma_k)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2k+1}^{2p+1} \left(Cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k}$
En utilisant la formule de la question précédente et sachant que $\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$ on trouve que
$P(\gamma_k) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0$
et donc

$$\boxed{P(\gamma_k) = 0}, \forall k \in [|1,p|]$$

(b) $\forall k \in [|1,p|]$ alors $\pi < k\pi \leq \pi p$ donc $0 < \dfrac{\pi}{2p+1} \leq \dfrac{k\pi}{2p+1} \leq \dfrac{\pi p}{2p+1}$
d'où $0 \leq \dfrac{k\pi}{2p+1} \leq \dfrac{\pi p}{p\left(2+\dfrac{1}{p}\right)} < \dfrac{\pi}{2}$
donc $\forall k \in [|1,p|]$ alors $\boxed{\dfrac{k\pi}{2p+1} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[}$
On a évidemment $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$

Comme $\forall k \in [|1,p|]$, $\dfrac{k\pi}{2p+1} \neq \dfrac{(k+1)\pi}{2p+1}$ et comme la fonction $x \mapsto Cotan(x)$ est srtictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors toutes les racines de P sont distincts.
Conclusion : P admet γ_1, γ_2, ..., γ_{p-1}, γ_p comme racines distincts avec $\gamma_k = Cotan^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$.

(c) D'après la deuxième partie, 1) on a $\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ or $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\gamma_k$

donc

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{p}\gamma_k = -\frac{(-1)^1C_3^{2p+1}}{(-1)^0C_1^{2p+1}} = \frac{\dfrac{(2p+1)!}{3!(2p-2)!}}{\dfrac{(2p+1)!}{1!(2p)!}} = \frac{(2p)!}{3!(2p-2)!} = \frac{(2p-1)(2p)}{2\times 3} = \frac{p(2p-1)}{3}$$

Or $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = \sum_{k=1}^{p}Cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}Cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}$$

Ensuite $\forall\varphi \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a

$Cotan^2\varphi = \dfrac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \dfrac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \dfrac{1}{\sin^2\varphi} - 1$

Donc pour $\varphi = \dfrac{k\pi}{2p+1}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}1 + \sum_{k=1}^{p}Cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{3p+2p^2-p}{3} = \frac{p(2p+2)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}}$$

4. On a toujours $\varphi \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

(a) $\forall\varphi \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin\varphi > 0$

➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin x - x$
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$
donc f est strictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et comme $f(0) = 0$
alors $\forall\varphi \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\boxed{0 < \sin\varphi < \varphi}$
➠On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ telle que $f(x) = tanx - x$

g est continue et dérivable sur son domaine de définition et
$g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$
donc g est strictement croissante sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et comme $g(0) = 0$
alors $\forall \varphi \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\boxed{\varphi < \tan \varphi}$
Conclusion :

$$\forall \varphi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ on a } \boxed{0 < \sin \varphi < \varphi < \tan \varphi}$$

(b) On sait d'après II 3) b) que $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc d'après la question précédente
$0 < \sin \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \tan \dfrac{k\pi}{2p+1}$
Or la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc
$0 < \sin^2 \dfrac{k\pi}{2p+1} < \left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)^2 < \tan^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}$
Or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} < \left(\frac{2p+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{p} Cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{2p+1}{k\pi}\right)^2 < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

D'après la question II 3) c) on obtient donc

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \times \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\boxed{\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}}$$

(c) $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2} > 0$ donc on peut diviser l'inégalité par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2}$ pour obtenir

$$\frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \times \frac{p(2p-1)}{3} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \times \frac{2p(p+1)}{3}$$

donc

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < S_n < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

or
➠ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$
et
➠ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$
d'après le Théorème d'encadrement des suites (ou Théorème des Gendarmes) on obtient :

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}}$$

5. Etude de certaines suites :
   $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$
   Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $U = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$ donc $\boxed{U = \frac{\pi^2}{24}}$

   $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} = S_{2n+1} - u_n$
   or S_{2n+1} est une suite extraite de S_n donc elle est convergente
   donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $V = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ donc $\boxed{V = \frac{\pi^2}{8}}$

   ➟ $w_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = -u_n + v_n$
   donc $(w_{2n+1})_{n\geq 1}$ est convergente.
   De plus
   ➟ $w_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^2} = -u_n + v_{n-1}$
   donc $(w_{2n})_{n\geq 1}$ est convergente.
   ➟ $w_{2(n+1)+1} - w_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} > 0$ donc $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   ➟ $w_{2(n+1)} - w_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} > 0$ donc $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Les suites $(w_{2n+1})_{n\geq 1}$ et $(w_{2n})_{n\geq 1}$ ont la même limite, l'une est croissante, l'autre est décroissante et donc elles sont adjacentes
   De plus $w_{2n} \leq w_n \leq w_{2n+1}$ (évident par différence Ex : $w_{2n} - w_n \leq 0$)
   donc on peut conclure que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par le théorème d'encadrement
   et $W = -U + V = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{2\pi^2}{24}$ donc $\boxed{W = \frac{\pi^2}{12}}$

3 TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt, \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calcul de I_0 et J_0 :
   $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$
   $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$ donc $\boxed{J_0 = \frac{\pi^3}{24}}$

2. Recherche de I_n en fonction de n :

   (a) $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \times \cos tdt$
   On pose $v(t) = \cos^{2n+1} t$ et $u(t) = \sin t$.
   Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} tdt = [t \times \cos^{2n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1)\sin^2 t \cos^{2n} tdt$
   donc
   $I_{n+1} = (2n+1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^{2n} tdt = (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$
   donc
   $I_{n+1} + (2n+1)I_{n+1} = (2n+1)I_n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n}$

   (b) Montrons cette formule par récurrence :
   On note $(\mathcal{P}_k)$ la proriété : $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$
   ➠ $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$
   ➠ On suppose maintenant que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie.
   ➠ Montrons que dans ce cas $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi :
   $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \dfrac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
   Par récurrence on prouve donc que :

   $$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

3. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} tdt$

   (a) On pose $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v(t) = t$.
   Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :
   $I_n = [t\cos^{2n} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t \times \cos^{2n-1} tdt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t \times \cos^{2n-1} tdt$
   On pose $u(t) = \sin t \times \cos^{2n-1} t$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$.
   Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :
   On note que
   $u'(t) = \cos^{2n} t - (2n-1)\sin^2 t \cos^{2n-2} t = \cos^{2n} t - (2n-1)(1-\cos^2 t)\cos^{2n-2} t =$
   $2n\cos^{2n} t - (2n-1)\cos^{2n-2} t$
   donc
   $I_n = 2n\left(\left[\dfrac{t^2}{2}\sin t \times \cos^{2n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} nt^2\cos^{2n} t - \dfrac{2n-1}{2}t^2\cos^{2n-2} tdt\right)$
   donc $I_n = 2n\left(-2J_n + \dfrac{2n-1}{2}J_{n-1}\right) = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$$

(b) D'après la question précédente et la III 3) b) on obtient :
$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{n(2n-1)(2(n-1))!}{4^{n-1}((n-1)!)^2}\frac{\pi}{2} - 2n^2\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}K_n$$
donc
$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2(2n)!}{4^n((n-1)!)^2}\left[K_{n-1} - K_n\right]$$
En divisant par $\dfrac{2(2n)!}{4^n((n-1)!)^2}$ on obtient :
$$K_{n-1} - K_n = \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n^2}$$
donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$$

(c) D'après la question précédente :
$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k^2} = \sum_{k=1}^{n}(K_{k-1} - K_k) = K_0 - K_n$$
or $K_0 = J_0$ donc on obtient la relation :
$$\boxed{\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n}$$

4. Encadrement de J_n et K_n

(a) La fonction sinus sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est concave donc sa courbe est au-dessus de la corde d'extrémités les points d'abscisse 0 et $\dfrac{\pi}{2}$
donc $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}\sin x \geq x$

(b) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t dt$

➠ $t^2\cos^{2n} t \geq 0$ et $0 < \dfrac{\pi}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $J_n \geq 0$

➠ De plus pour tout $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction carré est croissante donc d'après la question précédente on a $t^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2 t$
donc
$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \times \cos^{2n} t dt$$
donc
$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^{2n} t dt$$
donc
$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt - \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} t dt$$
donc
$$J_n \leq \frac{\pi^2}{4}I_n - \frac{\pi^2}{4}I_{n+1} = \frac{\pi^2}{4}\left[1 - \frac{2n+1}{2(n+1)}\right]I_n = \frac{\pi^2}{8(n+1}I_n$$
Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } \boxed{0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}}$$

De plus $K_n = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n \leq \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \dfrac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$
or $In = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$
donc
$K_n \leq \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \dfrac{\pi^2}{8(n+1)} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$
Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } \boxed{0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}}$$

(c) D'après la question précédente, on obtient : $-\dfrac{\pi^3}{16(n+1)} \leq -K_n \leq 0$

or d'après la question III 3) c) on a $\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$

donc
$J_0 - \dfrac{\pi^3}{16(n+1)} \leq \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq J_0$
donc

$$\boxed{\frac{4}{\pi}\left(J_0 - \frac{\pi^3}{16(n+1)}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{4}{\pi} J_0}$$

or
➠ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{4}{\pi}\left(J_0 - \frac{\pi^3}{16(n+1)}\right) = \frac{4}{\pi} J_0 = \frac{\pi^2}{6}$
et
➠ $\dfrac{4}{\pi} J_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$
donc d'après le théorème d'encadrement des suites (ou théorème des Gendarmes) on obtient :
$S = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4 QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

1. On note $x \neq 0 + 2k\pi$ alors $\sin \dfrac{x}{2} \neq 0$.

$$2D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) = \mathcal{R}_e\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\right)$$

donc

$$2D_n(x) = \mathcal{R}_e\left(e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \mathcal{R}_e\left(\frac{e^{-inx} \times e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right)$$

donc

$$2D_n(x) = \mathcal{R}_e\left(\frac{e^{-inx}\times e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\times\frac{2i\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{2i\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Conclusion :

$$\boxed{D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{\sin\dfrac{x}{2}}}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $L_n = \displaystyle\int_0^\pi xD_n(x)dx$

   (a) On note $K = \displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)dx$

   On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{1}{k}\sin(kx)$

   Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

   $K = [\dfrac{x}{k}\sin(kx)]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)dx = -\frac{1}{k}[-\frac{1}{k}\cos(kx)]_0^\pi$

   donc

   $K = -\dfrac{1}{k}\left(-\dfrac{1}{k}(-1)^k + \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k^2}((-1)^k - 1)$

   Conclusion :

   $$\boxed{\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1)}$$

   (b) $L_n = \displaystyle\int_0^\pi xD_n(x)dx = \int_0^\pi x\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos(kx)\right]dx$

   donc

   $L_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{2}dx + \int_0^\pi x\sum_{k=1}^n\cos(kx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi xdx + \sum_{k=1}^n\int_0^\pi x\cos(kx)dx$

   or d'après la question précédente $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}((-1)^k-1)$

   donc

   $L_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^\pi + \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}((-1)^k-1) = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^2}$

   Conclusion :

   $$\boxed{L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^2}}$$

3. On note f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par :

   $$f(x) = \frac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \text{ si } x \in]0;\pi] \text{ et } f(0) = 2$$

   ➠ f est continue sur $[0;\pi]$ ➠ f est dérivable sur $]0;\pi]$ et $f'(x) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) - \left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

   ➠ En 0, on a :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{h}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}-2}{h}=\frac{\frac{h-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}}{h}=\frac{h-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h\sin\left(\frac{h}{2}\right)}=\frac{h-2\left(\frac{h}{2}-\frac{h^3}{48}+o(h^3)\right)}{h\left(\frac{h}{2}-\frac{h^3}{48}+o(h^3)\right)}$$

donc

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{h^3}{24}+o(h^3)}{\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{h^2}{24}+o(h^3]\right)}=\frac{\frac{h}{12}+o(h)}{1-\frac{h^2}{24}+o(h^3)}=\left(\frac{h}{12}+o(h)\right)\left(1+\frac{h^2}{24}+o(h)\right)$$

donc

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h}{12}+o(h)$$

donc $f'(0)$ esxiste et vaut 0.

➟ Montrons que f' est continue en 0 :

En 0, on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)-\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)\right)^2}=\frac{\frac{x^3}{24}+o(x^3)}{\frac{x^2}{4}+o(x^2)}$$

donc

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{6}+o(x)}{1+o(1)}=\frac{x}{6}+o(x)$$

d'où : $\lim\limits_{n\to 0}f'(x)=0=f'(0)$ donc f' est continue en 0.

➟ d'autre part, f' est continue sur $]0;\pi]$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0;\pi]$ donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0;\pi]}$

4. Soit $\phi:[0;\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.
   ϕ et $x\mapsto\sin(\lambda x)$ sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$
   On peut appliquer la formule d'intégration par partie, et obtenir :

$$\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx=\left[-\frac{\phi(x)}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\phi'(x)}{\lambda}\cos(\lambda x)dx$$

donc

$$\left|\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx\right|=\left|-\frac{\phi(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)-\frac{\phi(0)}{\lambda}+\int_0^\pi\frac{\phi'(x)}{\lambda}\cos(\lambda x)dx\right|$$

Or ϕ' est continue sur le compact $[0;\pi]$ donc elle atteint ses bornes et il existe N dans $\mathbb{R}$ tel que $N=\left|\sup\limits_{x\in[0;\pi]}\phi'(x)\right|$.

On a donc

$$\left|\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx\right|\leq\left|\frac{\phi(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)+\frac{\phi(0)}{\lambda}\right|+N\left|\int_0^\pi\frac{\cos(\lambda x))}{\lambda}dx\right|$$

donc

$$\left|\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx\right|\leq\left|\frac{\phi(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)+\frac{\phi(0)}{\lambda}\right|+N\left|\left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda^2}\right]_0^\pi\right|$$

donc

$$\left|\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx\right|\leq\left|\frac{\phi(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)+\frac{\phi(0)}{\lambda}\right|+N\left|\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2}\right|$$

Or $|\cos(\lambda\pi)|\leq 1$ et $|\sin(\lambda\pi)|\leq 1$

donc

$$\left|\int_0^\pi\phi(x)\sin(\lambda x)dx\right|\leq\left|\frac{\phi(\pi)}{\lambda}+\frac{\phi(0)}{\lambda}\right|+N\left|\frac{1}{\lambda^2}\right|$$

or

➠ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\phi(\pi)}{\lambda} + \dfrac{\phi(0)}{\lambda} = 0$

➠ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda^2}$

donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)dx = 0}$$

5. On sait que $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi} xD_n(x)dx$ et $Dn(x) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$

   (a) On a donc

   $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx$

   On sait que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ d'après la question 3).

   On peut donc appliquer la formule du 4) avec $\phi(x) = f(x)$ et $\lambda = n + \dfrac{1}{2}$

   On obtient donc

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 0}$$

   (b) On utilise la question IV 2) b) et II 5)

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{\pi^2}{4} - \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - S - W$

   or $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$ donc $S = \dfrac{\pi^2}{4} - W$

   Cherchons W en fonction de S.

   D'après la question I 5) on a $U = \dfrac{1}{4}S$, $W = V - U = (S-U) - U = S - 2U = \dfrac{1}{2}S$

   donc $\dfrac{3}{2}S = \dfrac{\pi^2}{4}$ donc $S = \dfrac{2}{3}\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{6}$

   $$\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

5 CINQUIÈME PARTIE : Une somme double

1. On note N un entier tel que $N \geq 1$

   (a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

   On a donc

   $\forall n > 1, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx$

   donc en sommant de 2 à N on obtient

   $\displaystyle\sum_2^N \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_2^N \frac{1}{n} \leq \sum_2^N \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx$ donc $\displaystyle\int_2^{N+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_2^N\frac{1}{n} \leq \int_1^N \frac{1}{x}dx$

En calculant les intégrales, on obtient
$\ln(N+1) - \ln 2 \leq H_N - 1 \leq \ln N$ donc $\ln(N+1) + 1 - \ln 2 \leq H_N \leq 1 + \ln N$
or $1 - \ln 2 \approx 0.3069 > 0$ donc $\ln(1+N) < \ln(N+1) + 1 - \ln 2$
donc $\boxed{\ln(N+1) < H_N \leq 1 + \ln(N)}$

(b) D'après la question précédente, si $N \neq 0$ on a $\dfrac{\ln(N+1)}{N} < \dfrac{H_N}{N} \leq \dfrac{1+\ln(N)}{N}$
or

➠ $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln(N+1)}{N} = 0$

➠ $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1+\ln(N)}{N} = 0$

donc d'après le théorème d'encadrement, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{H_N}{N} = 0}$

(c) Pour tout $M \geq 2$ on applique la transformation d'Abel à $\displaystyle\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m}\frac{1}{m}$
donc
$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m}\frac{1}{m} = 1 + \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m}(H_m - H_{m-1}) = 1 - \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{M}H_M + \sum_{m=2}^{M-1} H_m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$
donc
$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^2} = \frac{H_M}{M} + \sum_{m=1}^{M-1} H_m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$
or $\left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}\right) = \dfrac{1}{m(m+1)}$
donc
$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^2} = \frac{H_M}{M} + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}}$$

(d) Comme $\displaystyle\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} = S_M - \frac{H_M}{M}$, que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{H_N}{N} = 0$
et que S_M converge alors $\displaystyle\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$ converge aussi
$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)} = \frac{\pi^2}{6}}$$

2. On note m un entier tel que $m \geq 2$

(a) On remarque que
Comme $m \geq 2$ alors $n + m - 1 \neq 0$ et comme $n \neq 0$ alors on a
$$\frac{1}{n(n+m-1)} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1}\right)$$
donc
$$Z_{N,m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1}\right) = \frac{1}{m-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1}\right)$$
donc

$Z_{N,m} = \dfrac{1}{m-1}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+m-1}\right)$ et en posant dans la deuxième somme $k = n+m-1$ on obtient

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{k=m}^{N+m-1}\frac{1}{k}\right)$$

Il y a deux cas possibles :

➠ Si $m \leq N$ alors

$Z_{N,m} = \dfrac{1}{m-1}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=m}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{k=m}^{N+m-1}\frac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$

➠ Si $m \geq N$ alors

$Z_{N,m} = \dfrac{1}{m-1}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{m-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$

Conclusion : Pour tout entier $m \geq 2$ on a :

$$\boxed{Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)}$$

(b) On a $0 < \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n} < \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{N+1} < (N+m-1-N-1+1)\frac{1}{N+1} < \frac{m-1}{N+1}$

or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{m-1}{N+1} = 0$

Donc

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=M+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right) = \frac{H_{m-1}}{m-1}$

donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}}$$

3. Etude de la somme double :

(a) Pour tout entier $N \geq 1$ et tout entier $M \geq 2$ on a

$A_{n,m} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{mn(n+m-1)}$

donc

$A_{n,m} = \displaystyle\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)} = \sum_{m=1}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$

donc

$A_{n,m} = \dfrac{Z_{N,1}}{1} + \displaystyle\sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$

Conclusion

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}}$$

(b) Calculons la limite de la relation précédente lorsque N tend vers $+\infty$

➠ $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

➠ $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{m=2}^{M}\dfrac{Z_{N,m}}{m}=\sum\limits_{m=2}^{M}\dfrac{\lim\limits_{N\to+\infty}Z_{N,m}}{m}=\sum\limits_{m=2}^{M}\dfrac{H_{m-1}}{m(m-1)}$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M}\dfrac{1}{mn(n+m-1)}$ existe et vaut $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{m=2}^{M}\dfrac{Z_{N,m}}{m}$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}}$$

(c) On a $\sum\limits_{m=2}^{M}\dfrac{H_{m-1}}{m(m-1)}=\sum\limits_{m=1}^{M-1}\dfrac{H_m}{m(m+1)}$

donc

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)}=\frac{\pi^2}{6}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}$$

or d'après la question V 1) d) on a $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{M-1}\dfrac{H_m}{m(m+1)}=\dfrac{\pi^2}{6}$

donc

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)}\right)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{mn(n+m-1)}\right)=\frac{\pi^2}{3}}$$

6 SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme

1. La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $[-1;0[\cup]0;1[$
   De plus :
   $\ln(1-t)\underset{0}{\sim}-t$ donc $\dfrac{\ln(1-t)}{t}\underset{0}{\sim}-1$
   donc $\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $[-1;1[$
2. $f(t)\underset{1}{\sim}\ln(1-t)$, or $\ln(1-t)$ est intégrable sur $[o;1]$ donc $Li(1)$ existe et $\lim\limits_{x\to1}Li(x)=Li(1)$
3. Développement de $\text{Li}(x)$ en série entière :

   (a) Pour tout $x\in]-1;1[$ on a $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

   donc $-\dfrac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ et donc en intégrant $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$

   On obtient donc que $\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$

donc
$\text{Li}(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}dt$
Puisque $x \in]-1;1[$ alors la convergence de la série entière est normale donc uniformement convergente et on peut donc intervertir somme et intégrale, pour obtenir
$\text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{n^2}\right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$
donc

$$\boxed{\text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$$

(b) La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est uniformement convergente sur $]-1,1[$ et $\text{Li}(x)$ est prolongeable par continuité en 1 donc $\text{Li}(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

donc

$$\boxed{\text{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

4. Etude de $\text{Li}(x)$+$\text{Li}(1-x)$:
   (a) On applique la formule suivante :

$$\text{Si } f(x) = \int_0^{ax+b} g(t)dt \text{ alors } f'(x) = ag(ax+b)$$

On obtient donc pour tout $x \in]0;1[$ que $(\text{Li}(x))' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ et $(\text{Li}(1-x))' = \frac{\ln(x)}{1-x}$
Conclusion :

$$\boxed{(\text{Li}(x)+\text{Li}(1-x))\text{'}= \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}$$

   (b) Si on pose $u(x) = -\ln(1-x)$ et $v(x) = \ln(x)$ alors on a
$Li(x) + Li(1-x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
donc $\text{Li}(x)$+$\text{Li}(1-x) = -\ln(1-x)\ln(x) + \lambda$
De plus $\ln(1-x)\ln(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x)\ln(x) = 0$
donc
$\lim\limits_{x\to 0}\text{Li}(x)$+$\text{Li}(1-x) = \lambda$ donc $\lambda = \text{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}$
Conclusion

$$\boxed{\forall x \in]0;1[\ ,\ \text{Li}(x)+\text{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)}$$

5. On applique la formule précédente pour $x = \frac{1}{2}$ en sachant que
$\text{Li}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$ et que $\text{Li}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \text{Li}\left(\frac{1}{2}\right)$
donc

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\ln^2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-(\ln(2))^2$$
donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln(2))^2}{2}}$$

6. Etude de Li(x)+Li$(-x)$:

   (a) Pour tout $x\in]-1;1[$ on a (Li(x)+Li$(-x)$)' $=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\dfrac{\ln(1+x)}{-x}=-\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$
   or Li(0)+Li$(-0)=0$ donc
   Li(x)+Li$(-x)$ $=-\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1-t^2)}{t}dt$
   On applique le changement de variable $u=t^2$ ($dt=\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{\sqrt{u}}$) alors
   Li(x)+Li$(-x)$ $=-\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\frac{\ln(1-u)}{u}du=\frac{1}{2}\text{Li}(x^2)$
   Conclusion

$$\boxed{\text{Li}(x)+\text{Li}(-x)=\frac{1}{2}\text{Li}(x^2)}$$

   (b) D'après la formule précédente : Li(1)+Li$(-1)=\dfrac{1}{2}$Li(1)
   donc Li$(-1)=-\dfrac{1}{2}$Li$(1)=-\dfrac{\pi^2}{12}$
   donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}}$$

7. Etude de $A(x)$ =Li(x)-Li$(-x)$+Li$\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$-Li$\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$

   (a) ➠ (Li(x))'$=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$
   ➠ (Li$(-x)$)'$=-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
   ➠ $\left(\text{Li}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)'=\dfrac{2}{1-x^2}\ln\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$
   ➠ $\left(\text{Li}\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)\right)'=\dfrac{2}{1-x^2}\ln\left(\dfrac{2}{1+x}\right)$
   On obtient donc
   $A'(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{2}{1-x^2}\ln\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)-\dfrac{2}{1-x^2}\ln\left(\dfrac{2}{1+x}\right)$
   donc
   $A'(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\dfrac{2}{1-x^2}\ln(x)$
   donc
   $A'(x)=(\ln(x))'\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\left(\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)'\ln(x)$
   On a donc

$A(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x) + \alpha$
Pour trouver α on fait tendre x vers 0 et on obtient :
$\mathrm{Li}(1) - \mathrm{Li}(-1) = \alpha$
donc $\alpha = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}$
Conclusion

$$\boxed{\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x)}$$

(b) On applique la formule précédente pour $x = \sqrt{2} - 1$
On obtient
$\mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) + \mathrm{Li}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\ln(\sqrt{2}-1)$
donc
$\mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) + \mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1)$
donc
$2(\mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2})) = \frac{\pi^2}{4} + \ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1)$
donc
$\mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1)$
donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{2}-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1)$
Dans le membre de gauche il reste que les termes d'exposants impairs, donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1)}$$