

Exercices des sujets de BAC

(Spécialité Terminale S)

Dernière mise à jour : Jeudi 14 Juin 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2007-2008)

J'aimais et j'aime encore
les mathématiques pour
elles-mêmes comme n'ad-
mettant pas l'hypocrisie et
le vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1	Arithmétique	4
1.1	France 2006	4
1.2	Polynésie 2006	4
2	Les Similitudes	5
2.1	France Juin 2007	5
2.2	Pondichéry 2007	5
2.3	Pondichéry 2006	6
2.4	Liban 2006	6
3	Géométrie dans l'espace	7
3.1	Polynésie 2007	7
3.2	Rochambeau 2007	7

1 Arithmétique

1.1 France 2006

PARTIE A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

PARTIE B

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) .
2. (a) Soit n_0 une solution de (S) , vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$
(b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.
3. (a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2b).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. quel est le reste r de cette division ?

1.2 Polynésie 2006

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1 Proposition 1

« pour tout entier naturel n , 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

2 Proposition 2

« si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0[6]$ alors $x \equiv 0[3]$ ».

3 Proposition 3

« l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

4 Proposition 4

« il existe un seul couple (a, b) de nombres naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$ ».

- 5 Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture \overline{abc} en base dix et N a pour écriture \overline{bca} en base dix.

Proposition 5

« Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

2 Les Similitudes

2.1 France Juin 2007

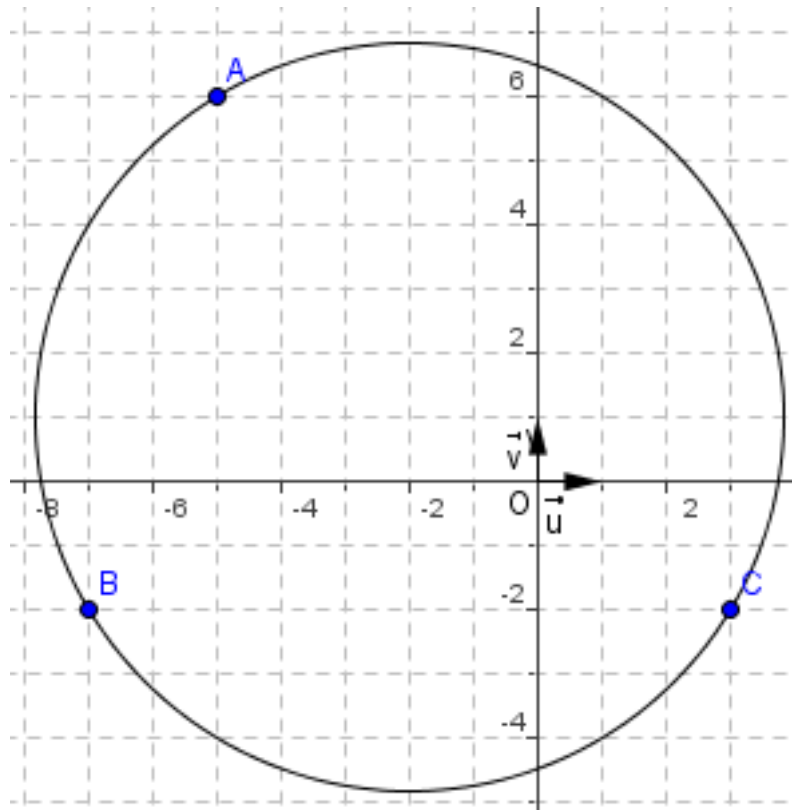
Compléter la figure tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectifs $-5 + 6i$, $-7 - 2i$ et $3 - 2i$.

On admet que le point F , d'affixe $-2 + i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC .

- Soit H le point d'affixe -5 . Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H .
- (a) Étant donné des nombres complexes z et z' , on note M le point d'affixe z et M' d'affixe z' . Soient a et b des nombres complexes.
Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M , associe le point M' .
Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s . Quelle est alors la nature de s ?
(b) En déduire l'affixe du point E , symétrique du point H par rapport à la droite (AC) .
(c) Vérifier que le point E est un point du cercle Γ .
- Soit I le milieu du segment $[AC]$.

Déterminer l'affixe du point G , image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.
Démontrer que les points H , G et F sont alignés.



2.2 Pondichéry 2007

- Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

- La composée de deux similitudes planes est une similitude plane.
- La transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane.
- Une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A , B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que :

$$s(A) = s'(A), s(B) = s'(B) \text{ et } s(C) = s'(C)$$

Montrer que $s = s'$

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1 + i$, F d'affixe $2 + i$ et G d'affixe $3 + i$.
- Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF . En déduire que ces triangles sont semblables.
 - Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S , en déterminant l'écriture complexe de S .
 - Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI) . Montrer que $S = \sigma \circ h$.

2.3 Pondichéry 2006

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique. Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z + 1$$

- Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .
- On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
 - Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .
 - Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.
 - A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
- Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
 - Pour tout entier naturel n , on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.
On a ainsi : $l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
Exprimer l_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (l_n) ?

2.4 Liban 2006

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6. (Unité graphique : 1 cm)

Partie A 1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B .
Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B .

Partie B 1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -2i\bar{z} + 6$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .

Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.

2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.

On pose $g = f \circ h$

(a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K .

(b) On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformatin g .

Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -i\bar{z} + 2 + 2i$ où z'' est l'affixe de M'' .

(c) Montrer qu'il existe sur l'axe $(O; \vec{v})$ un unique point invariant par g . On le note L .

Reconnaitre alors la transformatin g .

(d) En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL) . Préciser les éléments caractéristiques de h' .

3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

3 Géométrie dans l'espace

3.1 Polynésie 2007

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 2)$, $B(4, 6, -4)$ et le cône (Γ) d'axe (O, \vec{k}) , de sommet O et contenant le point A .

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B .
 - (a) Déterminer une équation de (P) .
 - (b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ) .
3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q) .
Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
 - deux droites parallèles.
 - deux droites sécantes.
 - une parabole.
 - une hyperbole.
 - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z) .
Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - (a) Résoudre l'équation (E) .
 - (b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. (a) Démontrer que si le point M de coordonnées (x, y, z) où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
 - (b) Montrer que si M est un point de (C_2) , intersection de (Γ) et de (Q) , alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - (c) Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - (d) Déterminer un point de (C_2) , distinct de A , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

3.2 Rochambeau 2007

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. (a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f .
 - (b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M' l'image de M par f .
Montrer que les vecteurs \overrightarrow{CM} et \overrightarrow{CA} sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation $(E) : x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - (a) Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E) .
 - (b) Résoudre l'équation (E) .
 - (c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5, 5]$ et tels que les vecteurs \overrightarrow{CM} et \overrightarrow{CA} soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.