Applications injectives, surjectives et bijectives

(Vers le supérieur ...) Terminale S

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2014-2015)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Un peu de théorie ...

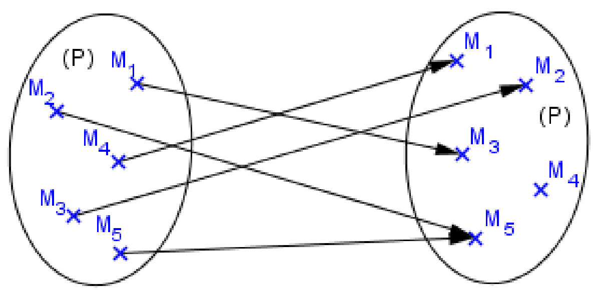
1.1 Définitions

On note f une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui à un point M de $\mathcal{P}$ lui associe un point M' de $\mathcal{P}$.
Si M' est l'image de M par l'application f, on note $\boxed{f(M) = M'}$.

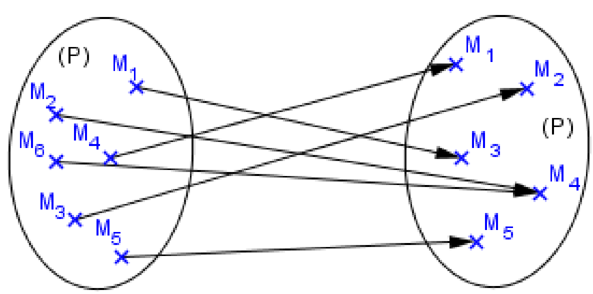
1.1.1 Applications surjectives

On dit que f est **surjective**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe au moins un antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

Exemples :
L'application ci-dessous, n'est pas surjective : M'_4 n'a pas d'antécédent.



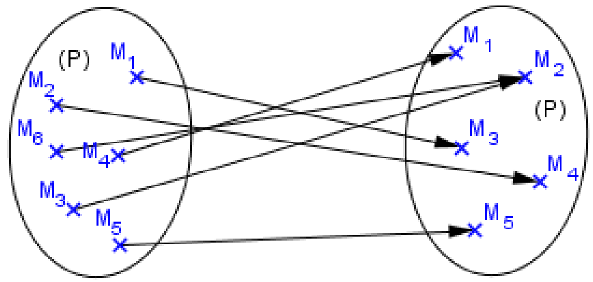
L'application ci-dessous, est surjective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée on au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.



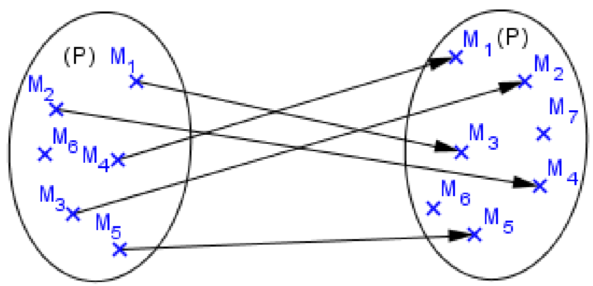
1.1.2 Applications injectives

On dit que f est **injective**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe au plus un antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

Conséquence :
Pour tout $M_1 \in \mathcal{P}$ et $M_2 \in \mathcal{P}$ si $f(M_1) = f(M_2)$ alors $M_1 = M_2$.
Exemples :
L'application ci-dessous, n'est pas injective : M'_2 a deux antécédents.



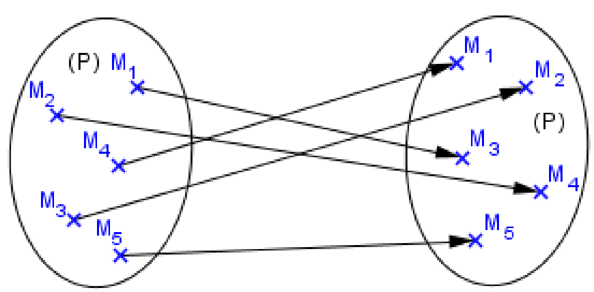
L'application ci-dessous, est injective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée on au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.



1.1.3 Applications bijectives

On dit que f est **bijectivee**, si pour tout point M' de $\mathcal{P}$ il existe un et un seul antécédent M dans $\mathcal{P}$ par f.

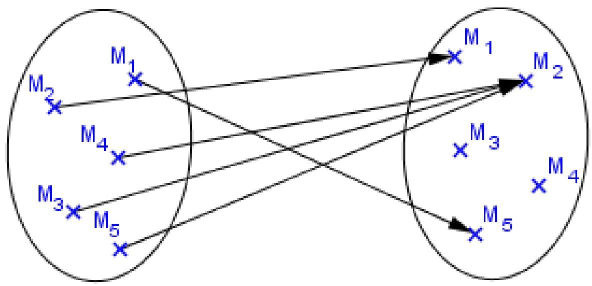
Conséquence :
Une application est bijective si elle est surjective et injective.
Exemples :
L'application ci-dessous, est bijective : Tous les points de l'ensemble d'arrivée ont un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ.

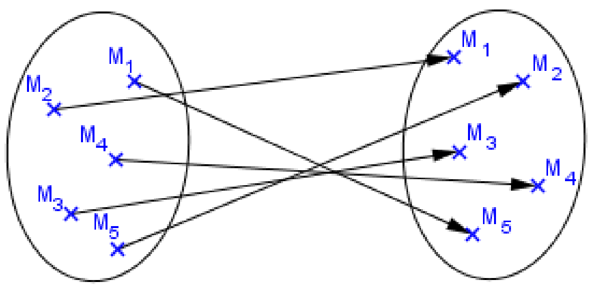


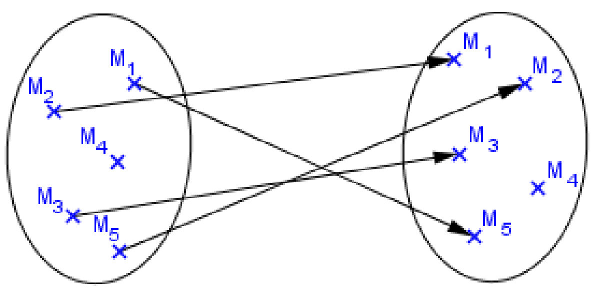
2 Exercices

Exercice 1 :

Pour chacun des schémas ci-dessous, dire si l'application est une injection, une surjection ou un bijection. (Justifier)



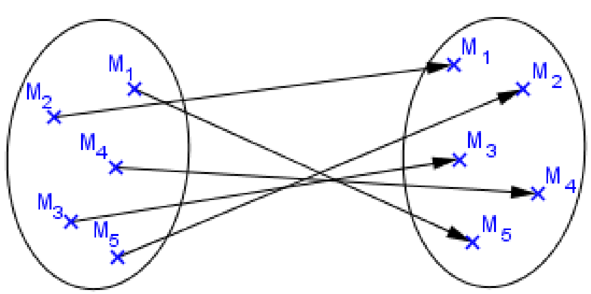


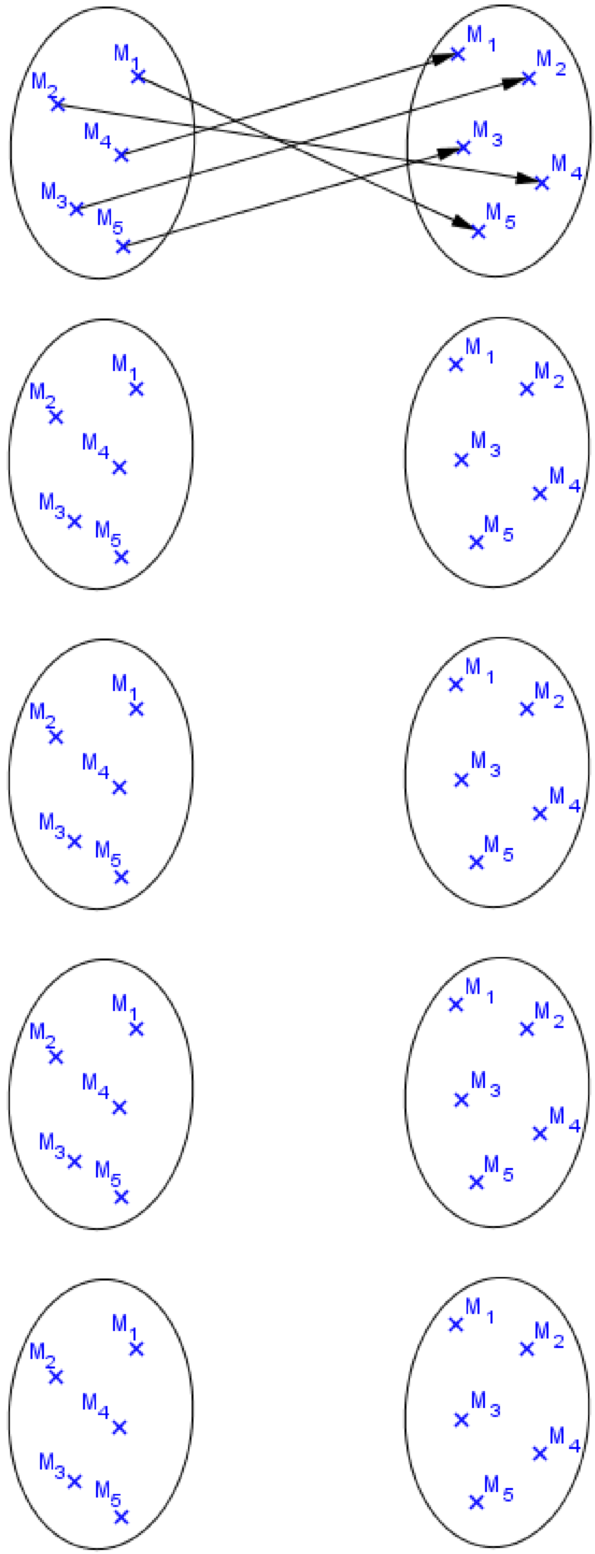


Exercice 2 :

On note f la transformation du premier schéma et g celle du deuxième.

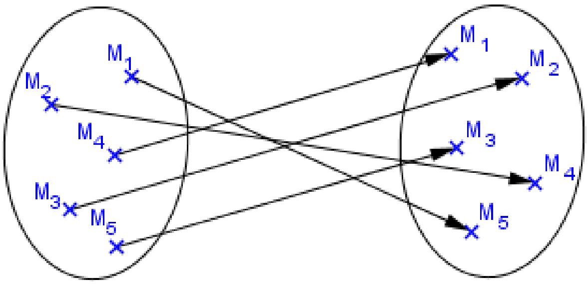
1. Vérifier que ce sont bien des bijections. (Justifier)
2. Décrire les transformations réciproques f^{-1} et g^{-1}.
3. Faire le schéma de la transformation $h = f \circ g$ et $s = g \circ f$.

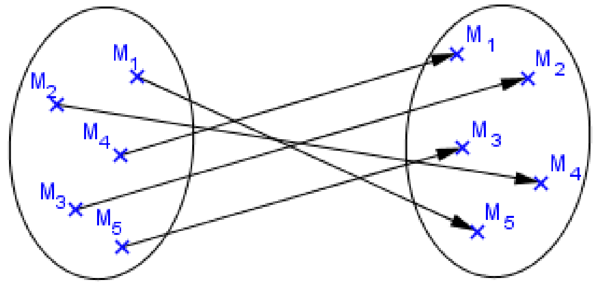



M1
M2
M3
M4
M5

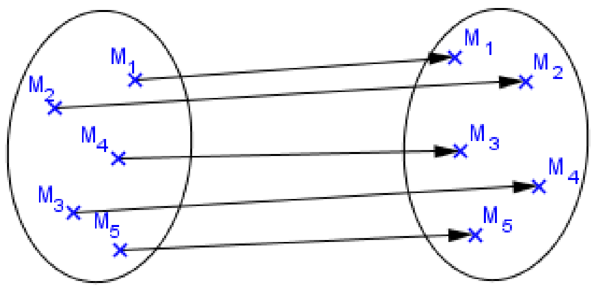
Exercice 3 :

On note f la transformation du premier schéma et g celle du deuxième.





1. Décrire les transformations $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?
2. Décrire les transformations $(f \circ g)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$. Que peut-on en déduire ?
3. On note h la transformation du shéma ci-dessous :



   (a) Décrire la transformation $h \circ (g \circ f)$.

   (b) Décrire la transformation $(h \circ g) \circ f$.

   (c) Que peut-on en déduire ?

   (d) Démontrer les deux propriétés suivantes :

      i. $f \circ g = h \Rightarrow g = f^{-1} \circ h$

      ii. $f \circ g = h \Rightarrow f = h \circ g^{-1}$