DS02 (Terminale S Spé)

"Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera : je ne sais pas le reste". (Evariste Galois)

La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.
Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.
La calculatrice n'est pas autorisée. (Devoir d'une heure)

Exercice 01 : (5 pts)

Soit n un entier et b un entier qui divise $n+1$ et n^2+n-2

1. Montrer que b divise n^2+2n+1
2. En déduire que b divise $n+3$
3. En déduire les entiers b qui divisent $n+1$ et n^2+n-2

Exercice 02 : (5 pts)

Rappel : Tout nombre entier naturel peut se mettre sous la forme $3q+r$ avec $r \in \{0;1;2\}$

a et b sont deux entiers naturels.

Démontrer que $ab(a^2-b^2)$ est un multiple de 3.

Exercice 03 : (5 pts)

Soit n un entier relatif et $p = n^2 - 3n + 6$

1. Montrer que $p-(n-9)^2$ est un multiple de 5.
2. Démontrer que $5 \mid p \quad \Leftrightarrow \quad n = 9+5k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice 04 : (5pts)

Démontrer que tous les termes de la suite définie pour $n \geq 0$ par

$$u_n = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

sont des multiples de 12. On pourra calculer $u_{n+1}-u_n$

Exercice Bonus : (Réflexion !!)

Quels sont les nombres complexes $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ dont les inverses sont de la forme $c+id$ avec $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$