DM02 (Terminale Spé S)

«Les nombres sont le plus haut degré de la connaissance. Le nombre est la connaissance même..» (Platon)

Exercice 01 : Etude d'un ensemble

On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

On note $E = \{a + b\varphi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que $\varphi^2 \in E$
2. Montrer que $\varphi^{-1} \in E$
3. Montrer que E est stable par somme.
4. Montrer que E est stable par différence.
5. Montrer que E est stable par produit.
6. Montrer que E est stable par inverse.
7. Montrer que E est stable par quotient.
8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi^n \in E$

Exercice 02 : Suite de Fibonacci

On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - \varphi u_n$
   a. Montrer que la suite v est géométrique.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n, en fonction de n.
   c. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sqrt{5}u_n + (1-\varphi)^n$
   a. Montrer que la suite w est géométrique.
   b. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Date :

A rendre avant le

Mardi 29 Sept

Un peu d'Histoire :

Leonardo Fibonacci

(v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien. « Léonard de Pise »

Suite de Fibonacci

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ (phi). Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. Les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations[1] du nombre d'or.

Source : wikipedia