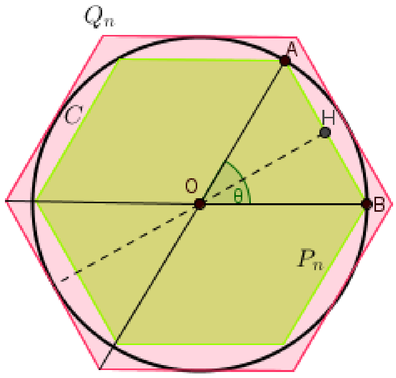
DM01 (Terminale Spé S)

«Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre.» **(Archimède)**

<u>Exercice</u> : Approximation de π



On note C un cercle trigonométrique de rayon 1. On construit pour tout $n \geq 1$ deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans le cercle C et Q_n est exinscrit au cercle C. H est le projeté orthogonal de O sur [AB].

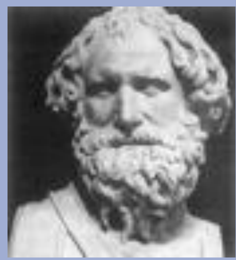
Pour tout $n \geq 1$, on note p_n et q_n les demi-périmètres de P_n et Q_n.

1. Représenter cette figure pour $3\times 2^n = 3$, puis $3\times 2^n = 4$, puis $3\times 2^n = 5$ et enfin pour $3\times 2^n = 12$. Quelle conjecture peux-tu faire sur p_n et q_n lorsque n tend vers l'infini ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer θ en fonction de n et π.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $AH = \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 3\times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$
5. Avec un raisonnement similaire aux deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = 3\times 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$
6. D'après la construction, on admet que (p_n) et (q_n) sont deux suites qui convergent vers la valeur de π. L'une décroît et l'autre croît et l'écart entre les termes des deux suites, converge vers 0 (On dira que les deux suites sont adjacentes et donc qu'elles convergent vers la même limite) . Pour trouver une approximation de π, on souhaite construire un programme qui donne les valeurs de p_n et q_n sans utiliser la valeur de π dans la programmation (ou alors c'est un serpent qui se mord la queue). On va donc chercher une relation de récurrence entre les termes de p_n et q_n (TSVP)

Date :

A rendre avant le **vendredi 19 Septembre.**

Un peu d'Histoire :



Archimède né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort à Syracuse en 212 av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur.

Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il a donné un encadrement de π d'une remarquable précision.

Source : <u>wikipedia</u>

Rappels de trigonométrie :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$

a. Démontrer les deux formules précédentes à l'aide des formules d'addition vues en première S.

b. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

et

$$\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_{n+1} = \sqrt{p_n \times q_{n+1}}$$

et

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right)$$

d. Ecrire un algorithme puis construire un programme TI82 ou Algobox ou Xcas qui permet de trouver une approximation de π à l'aide des deux suites (p_n) et (q_n). Vous donnerez les 20 premiers termes des suites (p_n) et (q_n) dans un tableau.

e. A partir de quelle valeur de n à t-on une valeur approchée de π à 10^{-6} près ?