# DS02 (Terminale S Spé ) (2 h)

« Les trois meilleurs exercices, les seuls, peut être, pour une intelligence sont : de faire des vers, de cultiver les mathématiques, et le dessin » *(Paul Valéry)*

**La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.**
**Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.**
**<u>La calculatrice n'est pas autorisée</u>. (Devoir de deux heures)**

**Exercice 01 : (≈ 5 mn)**

Le reste de la division euclidienne de $a$ par 11 est 8, celui de $b$ par 11 est 2.
Quel est le reste de la division euclidienne des nombres $a+b$ , $ab$ et $a^2$ par 11 ?

**Exercice 02 : (≈ 10 mn)**

1. a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
   b. En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ dont des multiples de 7.
2. En déduire les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de $2^{14607}$.

**Exercice 03 : (≈ 10 mn)**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. Soit n un entier naturel. $A = 5^{2n} - (-23)^n$ est divisible par 24.
2. $a \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv 0[4]$ alors $a \equiv 0[2]$
3. Si un entier $x$ est solution de $x^2 + x \equiv 0[6]$ alors $x \equiv 0[3]$
4. Soit n un entier naturel. Il existe exactement deux valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{4n-1}{n+1}$ est un entier relatif.

**Exercice 04 : (≈ 10 mn)**

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose $X = \overline{ababab}^{10}$

1. Montrer que $X$ est divisible par 481
2. Montrer que $X$ est divisible par 3
3. En déduire que $X$ est divisible par 1443

**Exercice 05 : (≈ 10 mn)**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$3^{6n+2} + 3^{n+1} + 1 \equiv 0[13]$$
2. Montrer que
$$5^{6614} - 12^{857} \equiv 1[7]$$

**Exercice 06 : (≈ 10 mn)**

On note $x$ un entier naturel.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de $x$ par 4 ?
2. Montrer alors par l'absurde que le nombre
$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$$
n'est jamais un carré, où les $p_i$ désignent les n premiers nombres premiers.

**Exercice 07 : (≈ 25 mn)**


Le numéro d'une carte bancaire est composé de 16 chiffres, clé comprise.
Dans ce numéro interviennent :

- Le type de carte
- Le numéro de la banque

Le seizième chiffre correspond à la clé qui permet de valider la carte.
Le code est donc de la forme :

$$a_1a_2\cdots\cdots a_{15}a_{16} \text{ où pour tout } i \in \{1,..,16\} \quad a_i \in \{0,..,9\}$$

C'est l'algorithme de Luhn qui permet de déterminer cette clé. Il permet de vérifier un numéro mais ne valide pas l'existence de la carte.
La fonction **Mod(a;b)** renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.
Algorithme de Luhn

**Algorithme de LUHN**
0→S
Pour i allant de 0 à 7
  $S \mapsto S + Mod(2\times a_{2i+1};9) + a_{2(i+1)}$
Fin du pour
Si Mod(S;10)=0 alors afficher («le clef est correcte »)
Sinon afficher(« la clef est fausse. »)
**Fin de l'algorithme.**

1. La clef du numéro de la carte ci-dessus est elle valide ?
2. Trouver la clef X du numéro de carte bleue : 5426 8567 1234 458 X.
3. **BONUS :** Montrer que si un chiffre est erroné, alors l'erreur est détectée.