DS02 (Terminale S Spé)

« La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques. » (**Gauss**)

La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.
Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.
<u>La calculatrice n'est pas autorisée</u>. (Devoir d'une heure)

Exercice 01 : (≈10 mn)

a et b sont des entiers naturels.

$a \mid 5b+31$ et $a \mid 3b+12$

1. Montrer que $a \mid 33$
2. Trouver alors les valeurs possibles de a.

Exercice 02 : (≈10 mn)

Trouver tous les entiers naturels tels que

$$\frac{11n-6}{3n+1} \in \mathbb{Z}$$

Exercice 03 : (≈5 mn)

$a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > 1$ tel que $n \mid (a-1)$

Montrer que $\cos\left(\frac{2a\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Exercice 04 : (≈10 mn)

On note $k \geq 2$ un entier naturel, $u_k = 2^k - 2$ et $v_k = 2^k u_k$.

1. Montrer que $v_k = (u_k+1)^2 - 1$
2. Montrer que si $d \mid u_k + 1$ alors $d \mid v_k + 1$
3. La réciproque est-elle vraie ? (justifier)

Exercice 05 : (≈10 mn)

On note x et y deux entiers naturels non nuls et on souhaite résoudre (E) : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

1. Montrer que $(E) \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$
2. Déterminer les couples solutions de (E)

Exercice 06 : (≈10 mn)

a et b sont des entiers naturels distincts et p un entier relatif.

1. Montrer que pour tout n entier naturel :
   $a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b)$
2. Montrer que si p divise $a-b$ alors pour tout n entier naturel, p divise $a^n - b^n$

Exercice 07 : (≈10 mn)

Démontrer le théorème suivant :

Si $a \in \mathbb{Z}$ divise $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ des entiers relatifs alors quels que soient $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ entiers relatifs

$$a \mid \sum_{k=1}^{n} b_k c_k$$

Exercice Bonus : (Réflexion !!)

On note $x \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $x \neq 1$

1. Montrer que $(x-1) \mid (x^n - 1)$
2. Montrer que si $d \mid n$, $d \in \mathbb{N}$, alors $(x^d - 1) \mid (x^n - 1)$
3. Montrer que $2^{2004} - 1$ est divisible par 3, par 7 et par 63.