DS01 (Terminale S Spé)

Ne crains pas l'échec. Ce n'est pas l'échec, mais le manque d'ambition qui est un crime. Avec des objectifs élevés, l'échec peut être glorieux. (**Bruce Lee)**

La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.
Vous devez justifier vos calculs ou affirmations.
La calculatrice n'est pas autorisée. (Devoir d'une heure)

Exercice 01 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$4^{n+1}+2=4(4^n+2)-6$$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4^n+2 est divisible par 3.

Exercice 02 :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=2u_n-3$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=-2^n+3$

Exercice 03 : $n \in \mathbb{N}^*$

On note $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$
2. Montrer **sans** utiliser de démonstration par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n=\frac{n}{n+1}$
3. Démontrer à l'aide d'une démonstration par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n=\frac{n}{n+1}$
4. Calculer $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{9900}$

Exercice 04 :

1. On note $H=\{3k+1,\quad k\in\mathbb{N}\}$. Montrer que si $a^2 \notin H$ alors $a \notin H$
2. $a \in \mathbb{R}$
Montrer que si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.
3. Un rectangle a pour aire 170 m². Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.

Exercice Bonus : (Réflexion !!)

On nomme $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or)

1. Montrer que ϕ est solution de l'équation $x^2=x+1$
2. Montrer que ϕ n'est pas un nombre rationnel.