

## Thème 01

### Etude des nombres triangulaires

Définitions :

- Un **carré parfait** un le carré d'un nombre entier.
- Un **nombre premier** est un nombre entier différent de 1, qui admet seulement deux diviseurs : 1 et lui-même.
- On nomme « **nombre triangulaire** » les nombres qui peuvent se représenter sous forme d'un triangle. On notera  $T_1, T_2, T_3, \dots$  ces nombres triangulaires.

Exemples :



$$T_1 = 1 \quad T_2 = 3 \quad T_3 = 6 \quad T_4 = 10$$

Remarque :  $T_1 = 1 \quad T_2 = 1+2 \quad T_3 = 1+2+3 \quad T_4 = 1+2+3+4$

On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la relation  $T_n = 1+2+3+\dots+n = \sum_{i=1}^n i$

1. Démontrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a  $T_n = T_{n-1} + n$
2. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n + T_n = n(n+1)$  et en déduire l'expression de  $T_n$  en fonction de  $n$
3. Démontrer que si  $N$  est un nombre triangulaire alors  $8N+1$  est un carré parfait.
4. Démontrer que la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un carré parfait.
5. Démontrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $T_n$  est un carré parfait (carré d'un nombre entier) alors  $T_{4n(n+1)}$  l'est aussi.
6. Démontrer qu'un nombre triangulaire strictement supérieur à 3 ne peut pas être un nombre premier. On pourra étudier les deux cas où  $n$  est pair et  $n$  impair.
7. Démontrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $T_n^2 = T_n + T_{n-1}T_{n+1}$
8. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_{n+1} + T_n = (n+1)^2$
9. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$
10. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $T_n = pq$  ( $p$  et  $q$  étant deux entiers naturels) alors  $T_{n+p+q} = T_{n+p} + T_{n+q}$ . On pourra étudier les deux cas où  $n$  est pair et  $n$  impair.

Date :

A rendre avant le  
**vendredi 13  
Novembre.**

Pour aller plus  
loin :

Les nombres  
polygonaux (ou  
nombres géométriques  
ou nombres figurés)  
sont des nombres  
particuliers car ils  
forment des figures  
géométriques.

Il existe les nombres  
triangulaires, carrés,  
pentagonaux,  
hexadécimaux etc.

**Problème  
facultatif pour  
ceux qui veulent  
s'amuser un peu :**

Des canards volent en  
formation carrée. Un tireur  
tire, tue un canard. Les  
canards se regroupent  
alors en 8 formations de  
vols triangulaires  
identiques. Sachant qu'au  
départ il y entre 85 et 285  
canards, trouver le nombre  
exact de canards en  
formation carrée et celui  
des canards en  
formation triangulaire.