Exercice : (Pour les candidat ayant suivi la spécialité mathématiques)

(Rendre cet exercice sur une copie séparée)

Partie $\boxed{\textbf{I}}$

On note θ un réel.

On note $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $A(\theta)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(0)$
2. Vérifiez que $A(\theta)^2 = A(2\theta)$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(A(\theta))^n = A(n\theta)$

Partie $\boxed{\textbf{II}}$

On note 0, 1, 2, ...,9, α et β les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711 \text{ en base } 10$$

1. (a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.
   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
   (b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131$.
   Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans la suite de l'exercice on note $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{12}$

2. (a) Démontrer que $N \equiv a_0$ [3]
   En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
   (b) Démontrer que $N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ [11]
   En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
3. Un nombre N_3 s'écrit $\overline{x4y}^{12}$ en base 12. Déterminer les valeurs de x et y pour lesquelles N_3 est divisible par 33.