

Exercice : (Pour les candidat ayant suivi la spécialité mathématiques)

(Rendre cet exercice sur une copie séparée)

Partie I Arithmétique

1. Résoudre l'équation diophantienne $12x + 31y = 442$
2. En multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31, j'obtiens 442. Quelle est ma date de naissance. (On ne demande pas l'année)

Partie II Suites et matrices

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n$

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$
2. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (Inscrire les calculs)
3. Calculer $T = P^{-1}AP$ (Inscrire les calculs)
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = PT^n P^{-1} X_0$
6. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?