La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation. La calculatrice est autorisée.

Date :

jeudi 10 Janvier.

Indications :

1,5 heure

Prochain DS

BAC BLANC

Barème

Ex 01 :

/1

/1

/1

/1,5

/1,5

Ex 02 :

/0,5

/1

/1,5

Ex 03 :

/2

Exercice 01

On donnera les résultats sous forme simplifiés et en valeurs exactes.

1. On note $A=\begin{pmatrix} \ln 3 & 2\ln 2 \\ 2\ln 3 & -\ln 2 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} \ln 2 & \ln 4 \\ 2\ln 9 & \ln 6 \end{pmatrix}$

   Calculer A+B puis A-B
2. On note $A=\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{\frac{x}{2}} \\ e^{-3x} & e \end{pmatrix}$ avec x un réel

   Calculer $\frac{1}{e^x}\times A$
3. On note $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

   Calculer $A\times B$ *puis* $B\times A$

Exercice 02

On note $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Comment nomme-t-on une telle matrice ?
2. Calculer A^2 puis A^3
3. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$
4.

Exercice 03

On note $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} et\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Résoudre l'équation : $x^2A-xB-2C=O$

Exercice 04 : (BAC ES Spécialité Juin 2012)

Une région se divise en deux zones.

Une zone A à proximité d'une grande agglomération, une zone B à proximité de la mer.

Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40% de la population habitait en zone A.

On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année 2010+n est défini par la matrice colonne $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
4. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n *et* M
5. Exprimer P_n en fonction de P_0, M *et* n
6. Donner la répartition de la population en 2013, en 2015 puis en 2020.

Question Bonus (suite de l'exercice 4)

7. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a+b=1$.
   a. Déterminer a et b pour que $P = MP$
   b. Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75% de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ? Justifier.

Date :

jeudi 10 Janvier.

Indications :

1 heure

Prochain DS

BAC BLANC

Barème

Ex 04 :

/1

/1

/2

/1

/1

/3

Bonus :

/2

Total : /20