

DM11 : Exercices divers ...

Exercice 01

On note, pour tout n entier naturel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$

Exercice 02 :

- Résoudre l'équation diophantienne $14a - 26k = 4$
- On considère deux entiers naturels a et b . Pour tout entier n , on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.
On décide de coder un message, en procédant comme suit : A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25. ($0 \rightarrow A, 1 \rightarrow B \dots$ etc). Pour chaque lettre α on détermine l'entier associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.
On ne connaît pas les entiers a et b , mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codé par la lettre O.
 - Montrer que les entiers a et b vérifient :
$$\begin{cases} 5a+b \equiv 10 [26] \\ 19a+b \equiv 14 [26] \end{cases}$$
 - En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$
 - Déterminer tous les couples d'entiers (a,b) avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$ tels que :
$$\begin{cases} 5a+b \equiv 10 [26] \\ 19a+b \equiv 14 [26] \end{cases}$$
- On suppose que $a=17$ et $b=3$
 - Coder le message « GAUSS »
 - Soient n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$ alors $17(n-p) \equiv 0 [26]$. En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.
- On suppose que $a=17$ et $b=3$
 - Soit n un entier naturel.
Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) - 9 - n$ par 26
 - En déduire le procédé de décodage.
 - En déduire le décodage de « KTGZDO »

Date :

A rendre pour le
Jeudi 18 Avril.