DM10 : Matrice inversible

Date :

A rendre pour le **Jeudi 4 Avril**.

Exercice 01 :

$$B=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B^2=-2I_2-2B$
2. En déduire que B est inversible puis déterminer la matrice B^{-1}
3. En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} 6a-5b=39 \\ 10a-8b=64 \end{cases}$$

(On rédigera la démarche)

Exercice 02 :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 puis A^3
2. Que peut-on dire de A^k pour $k\geq 3$ (k entier)
3. Vérifier que A et I_3 commutent et en déduire $(I_3+A)^4$

Exercice 03 :

$$A=\begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible **?** (Justifier)
2. Déterminer la matrice $B=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $AB=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. On note $P=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Montrer que $P^3-11P^2+14P-2I_3=0$
   b. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}
   c. Vérifier que $A=P\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$
   d. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=P\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$
   e. En déduire l'expression de A^n en fonction de n